**25° Rally Matematico Transalpino, seconda prova**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Titolo*** | ***Categorie*** | ***Origine*** | ***Ambiti*** |
| 1 | Una coppa di gelato con gli amici | 3 |  |  |  |  |  |  |  | RZ | Logica. Analisi di possibilità |
| 2 | I timbri di Manuela e di Luca | 3 | 4 |  |  |  |  |  |  | GTNU | Numerazione. Cifre e numeri |
| 3 | Isidoro e il compito a puntate! | 3 | 4 |  |  |  |  |  |  | GTNU | Numerazione. Cifre e numeri |
| 4 | Quadrati in una figura | 3 | 4 |  |  |  |  |  |  | LUX | Geometria piana. Costruzione di quadrati |
| 5 | Lancio nei cesti | 3 | 4 | 5 |  |  |  |  |  | SI | Numerazione. Costruzione di numeri |
| 6 | Il robot Robert |  | 4 | 5 | 6 |  |  |  |  | GTCP | Percorsi su una rete e proporzionalità |
| 7 | La cornicetta di Anna |  | 4 | 5 | 6 |  |  |  |  | GTAL | Calcolo di aree in una decorazione modulare |
| 8 | L’ora dell’orologio digitale |  |  | 5 | 6 | 7 |  |  |  | BL | Misure di tempo e operazioni sulle ore |
| 9 | I draghi |  |  | 5 | 6 | 7 |  |  |  | BB | Determinare tre numeri con semplici condizioni |
| 10 | I quadrilateri di Patrizia |  |  | 5 | 6 | 7 | 8 |  |  | SR | Geometria piana. Quadrilateri equivalenti |
| 11 | Le prugne |  |  | 5 | 6 | 7 | 8 |  |  | GTCP | Operazioni e proporzioni |
| 12 | I compleanni |  |  |  | 6 | 7 | 8 |  |  | RV | Aritmetica. Ricerca di coppie di numeri interi |
| 13 | Una scatola particolare |  |  |  |  | 7 | 8 | 9 | 10 | GTGE | Geometria. Disegno delle facce di un prisma |
| 14 | Il tavolo triangolare |  |  |  |  | 7 | 8 | 9 | 10 | PU | Geometria piana. Area di triangoli ed esagoni |
| 15 | Barattolo di fagioli |  |  |  |  |  | 8 | 9 | 10 | RV | Aritmetica. Divisibilità e resti |
| 16 | La Signora Farfalla |  |  |  |  |  | 8 | 9 | 10 | GTGP | Geometria. Area di triangoli o di un trapezio |
| 17 | Un colle alpino in bicicletta |  |  |  |  |  |  | 9 | 10 | FC | Calcolo di velocità medie |
| 18 | Robot-Alpha |  |  |  |  |  |  | 9 | 10 | GTAL | Percorso su una griglia. Successione numerica |
| 19 | Vincere con un dado |  |  |  |  |  |  | 9 | 10 | GTAO | Probabilità elementare. Evento contrario |

I problemi del RMT sono protetti da diritti di autore.

Per un'utilizzazione in classe deve essere indicata la provenienza del problema inserendo la dicitura "©ARMT".

Per un'utilizzazione commerciale, ci si può mettere in contatto con i coordinatori internazionali attraverso il sito Internet dell'associazione del Rally Matematico Transalpino (http://www.armtint.org).

**1. UNA COPPA DI GELATO CON GLI AMICI** (Cat. 3)

Sei amici si ritrovano per mangiare un gelato insieme.

Ognuno di loro ordina una coppa con quattro palline di gelato. Ci sono però solo due gusti a disposizione: palline al cioccolato, palline alla fragola.

I sei amici potranno avere coppe di quattro palline con composizioni tutte diverse dei due gusti a disposizione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Determinare il numero delle combinazioni con ripetizione di due oggetti a 4 a 4 (4 palline di gelato e due gusti).

Analisi del compito

- Comprendere che ciascuna coppa di gelato può essere composta solamente da palline alla fragola, o solamente da palline al cioccolato oppure da palline dei due gusti.

- Rappresentare la situazione con uno schema o con un disegno: ci sono due coppe formate da un solo gusto (F-F-F-F e C-C-C-C), una coppa formata da due palline al cioccolato e due alla fragola (C-C-F-F) e due coppe formate da tre palline di un gusto e una dell’altro (C-C-C-F e F-F-F-C).

- Capire che la “posizione” del gusto non cambia la composizione della coppa di gelato: ad esempio C-F-C-C e C-C-F-C rappresentano la stessa coppa.

- Dedurre che ci sono solo cinque coppe di gelato possibili: F-F-F-F - C-C-C-C - C-F-F-F - F-C-C-C - F-F-C-C e che i sei amici non potranno avere tutti una coppa diversa.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (“No”) con elenco o disegno delle cinque differenti composizioni di coppe di gelato

3 Risposta “Sì” dovuta a una ripetizione, ma con elenco o disegno corretto delle cinque differenti composizioni di coppe di gelato

 oppure risposta “No”, perché sono individuate solo quattro differenti composizioni di coppe di gelato, senza ripetizioni

2 Risposta errata “Sì” (oppure senza risposta) dovuta alla presenza di due ripetizioni, ma con elenco o disegno corretti delle cinque differenti composizioni di coppe di gelato

 oppure risposta “No” (oppure senza risposta), motivata dal fatto che sono individuate solo quattro differenti composizioni di coppe di gelato, con aggiunta una ripetizione”

1 Inizio di ricerca coerente: individuate tre differenti composizioni di coppe di gelato con o senza ripetizioni

0 Incomprensione del problema, oppure risposta “No” senza alcuna traccia di ricerca

Livello: 3

Origine: Rozzano

**2. I TIMBRI DI MANUELA E DI LUCA** (Cat. 3, 4)

Manuela ha a disposizione cinque timbri con i quali può stampare queste cifre: 0-2-4-6-8.

Anche Luca ha cinque timbri con i quali può stampare queste cifre: 1-3-5-7-9.

Quanti numeri minori di 100 può stampare Manuela con i suoi timbri e quanti ne può stampare Luca con i suoi?

Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Determinare e contare tutti i numeri di una o due cifre, da 0 a 99, che si scrivono usando solo le cifre “pari” o solo le cifre “dispari”.

Analisi del compito

- Comprendere che non è possibile dividere i cento numeri in due parti perché non si tratta di ricercare i numeri pari e i numeri dispari (i numeri scritti con una cifra pari e una dispari non sono attribuibili né a Luca né a Manuela).

- Comprendere che per stampare i numeri entro il 10 occorre un solo timbro, mentre per i numeri da 10 a 99 occorre utilizzare due timbri stampando due cifre una accanto all’altra.

- Scrivere l’elenco di tutti i numeri da 0 a 99, evidenziare in modo diverso i numeri di Manuela e quelli Luca, quindi procedere ai relativi conteggi.

Oppure,

- scrivere e contare separatamente i numeri di Manuela e di Luca: i numeri formati da una sola cifra sono 5 per Manuela (0, 2, 4, 6, 8) e 5 per Luca (1, 3, 5, 7, 9); i numeri a due cifre sono invece 25 per Luca (11,13,15,17,19; 31,33,35,37,39; 51,53,55,57,59; 71,73,75,77,79; 91,93,95,97,99) e 20 per Manuela (20,22,24,26,28; 40,42,44,46,48; 60,62,64,66,68; 80,82,84,86,88) perché tutte le cifre dispari possono occupare sia il posto delle decine che quello delle unità dando luogo a numeri diversi, mentre, nel caso delle cifre pari, questo non accade per lo zero che può occupare solo il posto delle unità.

Oppure (con una modalità di conteggio di tipo combinatorio),

- dopo una prima fase di ricerca, rendersi conto, eventualmente ricorrendo ad una rappresentazione grafica, che si possono formare tutti i numeri di Luca a due cifre combinando le cinque possibilità per le cifre delle decine con le cinque possibilità per le cifre delle unità e conteggiare così 25 = 5×5 numeri; mentre, procedendo allo stesso modo con le cifre pari per formare i numeri di Manuela, poiché si deve escludere la cinquina dei numeri che hanno 0 alle decine, si conteggiano 20 = 4×5 numeri. Considerare poi i 5 numeri ad una cifra sia per Luca che per Manuela.

- Concludere che i numeri possibili per Manuela sono 25, mentre quelli possibili per Luca sono 30.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (25 Manuela e 30 Luca) con descrizione chiara della procedura utilizzata, che può essere anche solo l’elenco completo dei numeri di ciascuno

3 Risposta corretta con una descrizione incompleta della procedura utilizzata (incompletezze nell’individuazione o nell’elenco dei numeri, nella procedura di calcolo seguita, ...)

 oppure risposta con un errore di conteggio ma con descrizione chiara della procedura utilizzata

2 Risposta corretta senza alcuna descrizione della procedura utilizzata

 oppure indicato in modo corretto solo uno dei due numeri richiesti e assente o errato l’altro, con dettaglio della procedura utilizzata

1 Inizio di ragionamento corretto

 oppure risposta corretta solo per una tipologia di numeri senza descrizione della procedura utilizzata

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Gruppo Numerazione

**3. ISIDORO E IL COMPITO A PUNTATE** (cat. 3, 4)

Lunedì Isidoro ha scritto tutti i numeri interi da 1 a 100 e ha contato le cifre “2” che ha scritto. In tutto ha contato venti cifre “2”, l’ultima che ha scritto era il “2” del numero 92.

Martedì continua a scrivere la successione dei numeri interi: 101, 102, 103, 104, 105, … .

Ad un certo momento si accorge che nel corso di questa giornata sta scrivendo la venticinquesima cifra “2”.

Quale numero sta scrivendo Isidoro nel momento in cui scrive la venticinquesima cifra “2”?

Mostrate come l’avete trovato.

Analisi a priori

Compito matematico

Nella scrittura della successione dei numeri naturali a partire da 101, determinare qual è il numero nel quale la cifra 2 appare per la venticinquesima volta.

Analisi del compito

- Capire che si deve contare quante volte compare la cifra 2 nella successione dei numeri naturali a partire da 101, in qualunque posizione essa si trovi: unità, decine, centinaia.

- Comprendere, a partire dall’esempio, che non sarà sufficiente un solo centinaio per contare 25 volte la cifra 2.

- Scrivere la successione completa dei numeri a partire da 101 e contare solo la cifra 2 fino ad arrivare a leggerla 25 volte.

Oppure,

- scrivere solo i numeri oltre il 100 contenenti la cifra 2 in una qualunque posizione.

Oppure,

- procedere in maniera organizzata: da 101 a 199 la cifra 2 compare 10 volte nelle unità, 10 volte nella decina da 120 a 129, per un totale di 20 volte. Mancano ancora 5 occorrenze della cifra 2 che si trovano nei successivi numeri: 200, 201, 202, 203.

- Concludere che il numero in cui compare per la venticinquesima volta la cifra 2 è 203

Oppure,

- dalla prima informazione dedurre che occorrono 20 cifre “2” per scrivere gli interi da 101 a 199. Scrivere poi gli interi 200, 201, 202, 203 per trovare le cinque occorrenze mancanti della cifra 2.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (203) con la descrizione chiara della ricerca effettuata o del ragionamento o la risposta «122» per l’interpretazione dell’enunciato: la 25a cifra 2 è quella che compare continuando a contare dopo le 20 di lunedì: quindi la 21e compare nel 102, la 22e nel 112, la 23e nel 120, la 24e nel 121 e la 25e nella cifra di mezzo del 122.

3 Risposta corretta con descrizione poco chiara della ricerca

2 Risposta con uno o due errori nel conteggio con presentazione chiara della ricerca

 oppure inizio organizzato della ricerca con almeno 20 volte la cifra 2, ma la successione non è completa

 oppure risposta corretta senza alcun’altra indicazione

1 Inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Gruppo Numerazione (revisione di *Caccia al tre,* 10.I.3)

**4. QUADRATI IN UNA FIGURA** (Cat. 3, 4)

Su un foglio di carta che ha tanti punti disposti in modo regolare su righe e colonne, Gianmarco ha disegnato una figura.

Ha poi unito tra loro quattro punti che sono all’interno della figura ed ha ottenuto il quadrato che vedete qui a fianco.

Gianmarco si accorge però che ci sono altri quadrati che può disegnare, unendo ogni volta quattro punti tra quelli segnati all’interno della figura.

Disegnate tutti gli altri possibili quadrati utilizzando le figure di cui avete bisogno tra quelle riportate qui sotto.



Analisi a priori

Compito matematico

Trovare tutti i quadrati i cui vertici sono su quattro punti di un reticolo quadrettato, all’interno di una figura data.

Analisi del compito

Comprendere che occorre scegliere come vertici dei quadrati solo i punti del reticolo che sono all’interno della figura.

Scegliere tra tutti i quadrilateri che si possono formare, quelli che hanno i quattro lati della stessa lunghezza e due angoli retti. Si ottengono così i quadrati cercati.

Constatare che si possono formare:

   

 3 altri quadrati piccoli 1 quadrato grande 2 quadrati «di sbieco»

Attribuzione dei punteggi

4 I sei quadrati correttamente disegnati e ben individuabili senza figure errate oppure i sette quadrati con la ripetizione di quello assegnato oppure i cinque quadrati più piccoli con esclusione esplicita del quadrato grande perché tocca 8 punti

3 Cinque quadrati correttamente disegnati e ben individuabili oppure sei quadrati con la ripetizione di quello assegnato

 oppure i sei o sette quadrati correttamente disegnati e ben individuabili, ma anche una figura errata

 oppure i sei o sette quadrati correttamente disegnati, ma senza una loro chiara individuazione (in mezzo ad altri disegni)

 oppure, in ogni caso precedente, un quadrato in meno con esclusione esplicita del quadrato grande perché tocca 8 punti

2 Quattro quadrati correttamente disegnati e ben individuabili oppure cinque quadrati con la ripetizione di quello assegnato

 oppure cinque correttamente disegnati e ben individuabili, ma anche, una figura errata

 oppure, in ogni caso precedente, un quadrato in meno con esclusione esplicita del quadrato grande perché tocca 8 punti

1 Tre o quattro quadrati correttamente disegnati e ben individuabili con una figura errata

 oppure, in ogni caso precedente, un quadrato in meno con esclusione esplicita del quadrato grande perché tocca 8 punti

0 Incomprensione del problema (per esempio, ogni risposta che contiene più di una figura che non è un quadrato)

Livello: 3, 4

Origine: Lussemburgo

**5. LANCIO NEI CESTI** (Cat. 3, 4, 5)

In palestra l’insegnante propone ai bambini un nuovo gioco. Ciascun bambino dovrà lanciare palline da tennis in 2 cesti disposti uno accanto all’altro. Se la pallina entra nel cesto di destra si guadagna un punto, se invece entra in quello di sinistra si guadagnano 10 punti.

Anna lancia 12 palline e nessuna di esse va fuori dai cesti, poi fa il totale dei punti ottenuti.

Calcolate tutti i punteggi totali che Anna può aver ottenuto.

Mostrate in modo dettagliato come li avete trovati.

Analisi a priori

Compito matematico

Trovare le differenti somme di dodici numeri uguali a 1 e/o a 10.

Analisi del compito

Comprendere le regole del gioco e capire che ogni pallina da tennis assume un valore diverso: vale 1 punto se si trova nel cesto di destra, vale 10 punti se si trova in quello di sinistra.

Rendersi conto che ci sono più soluzioni, cioè più punteggi totali possibili, che dipendono dal numero di palline entrate in ciascuno dei cesti.

Immaginare o disegnare la situazione e calcolare ogni volta il punteggio.

- Ci sono più modi di organizzare i calcoli: addizionare i termini uno ad uno (per es. 1+1+1+1+...+10+10) oppure, tenendo sotto controllo il numero degli “1” e quello dei “10”, effettuare le combinazioni di moltiplicazioni e addizioni (per es. 5×1+7×10).

Oppure,

- calcolare il punteggio più basso, 12 (corrispondente a 12 palline nel cesto di destra) e trovare poi i successivi punteggi, togliendo 1 e aggiungendo 10, fino ad arrivare a 120 (corrispondente a 12 palline nel cesto di sinistra): 12; 12-1+10= 21; 21-1+10=30; 30-1+10= 39; … ; 111-1+10=120 (ovvero, aggiungendo 9 ogni volta).

- In alternativa, partire dal punteggio più alto, 120, e successivamente togliere 10 e aggiungere 1 (cioè togliere 9 ogni volta) fino ad arrivare a 12.

- La ricerca potrebbe essere organizzata in una tabella che metta in evidenza nello stesso tempo le scomposizioni del 12 in somme di due interi e i numeri ottenuti.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (12-21-30-39-48-57-66-75-84-93-102-111-120) con un procedimento organizzato, una tabella o una descrizione dettagliata della procedura seguita

3 Risposta corretta che riporta tutte le possibilità, ma con una descrizione poco chiara della procedura seguita (tralasciati uno o più passaggi)

 oppure risposta incompleta per mancanza di uno dei possibili punteggi o un solo errore di calcolo, ma con dettaglio della ricerca

2 Risposta incompleta per mancanza da due a quattro dei possibili punteggi o due o tre errori di calcolo, ma con dettaglio della ricerca

 oppure risposta incompleta per mancanza di uno dei possibili punteggi, o con un solo errore di calcolo, ma senza dettagli sulla ricerca

 oppure risposta corretta senza spiegazione

1 Risposta incompleta per mancanza da cinque a sette punteggi possibili o quattro o cinque errori di calcolo, ma con dettaglio della ricerca

 oppure risposta incompleta per mancanza da due a quattro dei possibili punteggi, o due o tre errori di calcolo, ma senza dettagli sulla ricerca

0 Incomprensione del problema o ogni altra risposta

Livello: 3, 4, 5

Origine: Siena

**6. IL ROBOT ROBERT** (cat. 4, 5, 6)

Il robot Robert si muove spostandosi sulle linee della griglia disegnata qui a fianco, compiendo passi sempre della stessa lunghezza.

Per spostarsi da A a B può seguire percorsi diversi.

Quando segue questo percorso fa 56 passi:

Invece quando segue quest’altro percorso fa 36 passi:

Quanti passi fa il robot Robert quando segue quest’altro percorso?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Su una rete composta da due tipi di segmenti, corti e lunghi, trovare la lunghezza di un cammino composto da un segmento corto e 5 segmenti lunghi, conoscendo la lunghezza di un cammino di 7 segmenti lunghi (56 passi) e quella di un cammino di 3 segmenti lunghi e 3 segmenti corti (36 passi).

Analisi del compito

- Comprendere che il robot Robert fa sempre un numero intero di passi per percorrere un segmento della griglia e che per percorrere segmenti uguali impiegherà lo stesso numero di passi perché i suoi passi hanno sempre la stessa lunghezza.

- Ricavare così dal primo percorso, composto da 7 segmenti lunghi, che ciascun segmento vale 8 passi (56:7).

- Osservare il secondo percorso e rendersi conto che esso è formato da 3 segmenti lunghi e da 3 segmenti corti.

- Dedurre che Robert, per percorrere i 3 segmenti lunghi del secondo percorso, impiegherà 24 passi (8×3) e che quindi per percorrere i 3 segmenti corti ne impiegherà 12 (36−24); di conseguenza ogni segmento corto misura 4 passi (12:3).

- Concludere che per compiere il terzo percorso, composto da 5 segmenti lunghi e 1 corto, Robert impiegherà 44 passi (8×5+1×4).

Oppure,

- osservare che il secondo percorso è formato da 3 segmenti corti e da 3 segmenti lunghi e dedurre che, per percorrere un segmento lungo e un segmento corto, Robert impiega complessivamente 12 passi (36:3).

- Procedere per tentativi per trovare quanti passi valgono ciascuno dei due segmenti (6-6, 7-5, 8-4, 9-3, 10-2, 11-1) e scoprire che l’unica possibilità compatibile con il primo percorso è 8 passi per il segmento lungo e 4 passi per quello corto.

- Concludere che Robert compie 44 passi per il terzo percorso.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (44 passi o 44) con spiegazioni chiare (che mostrino come sono stati determinati 8 passi, poi 4 passi e il totale 8 × 5 + 4, o con il numero dei passi di ciascun segmento scritto sui disegni)

3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare (per esempio, senza dire come sono state trovati inumeri di passi 8 e 4)

2 Risposta corretta senza spiegazioni

 oppure ragionamento corretto ma con un errore di calcolo

1 Inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema o misure con il righello delle lunghezze dei segmenti per individuare il numeri di passi

Livello: 4, 5, 6

Origine: Gruppo Calcolo e Proporzionalità (modifica del problema *Il robot Arturo*, 20.II.2)

**7 LA CORNICETTA DI ANNA** (Cat. 4, 5, 6)

Su un foglio quadrettato del suo album da disegno, Anna disegna una cornicetta di due colori, nero e grigio.

Ecco l’inizio della cornicetta:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Anna osserva che in questa prima parte la zona colorata di nero corrisponde a 9 quadretti.

Anna continua a disegnare la cornicetta fino alla fine del foglio e quando finisce osserva che la zona colorata di nero corrisponde a 58 quadretti.

Nella cornicetta completa a quanti quadretti corrisponde la zona colorata di grigio?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALisi A PRIORI

Compito matematico

Determinare l’area della parte grigia di una decorazione, la cui parte iniziale è disegnata su carta quadrettata e colorata in nero e grigio, conoscendo l’area totale della parte nera dell’intera decorazione.

Analisi del compito

- Osservare il disegno che mostra l’inizio della cornicetta ed eventualmente proseguirlo per capire le regole di costruzione.

- Riconoscere che la zona colorata di nero è formata da 3 quadretti neri visibili in figura e da 6 triangoli neri, ciascuno formato da due mezzi quadretti corrispondenti quindi a un quadretto. Così i 6 triangoli “contano” per 6 quadrati.

- Per determinare il numero totale dei quadretti della parte grigia si può procedere in più modi. Riprodurre su un foglio quadrettato la cornicetta e fermarsi quando si sono contati 58 quadretti neri. Contare poi i quadretti corrispondenti alla parte grigia e trovare che sono 116. Questa procedura è lunga e richiede attenzione nel conteggio dei quadretti.

Oppure,

- rendersi conto che c’è un modulo che si ripete costituito da una striscia verticale di tre quadretti di cui quello in mezzo nero e un’altra striscia verticale di sei quadretti in cui sono presenti due triangoli neri, ciascuno corrispondente ad un quadretto. In tale modulo quindi la parte nera corrisponde in totale a 3 quadretti, mentre la parte grigia corrisponde al doppio, cioè a 6 quadretti.

- Determinare il numero di moduli nella cornicetta finita, cercando il massimo multiplo di 3 inferiore a 58 o utilizzando la divisione con resto di 58 per 3, ed ottenere 19. Rendersi conto che con 19 moduli si arriva a 57 quadretti neri e che c’è quindi da aggiungere un altro quadretto nero. Dedurre che la cornicetta termina con una striscia verticale di un quadretto nero e 2 quadretti grigi.

- Calcolare infine il numero dei quadretti grigi, considerando che ce ne sono 6 in ogni motivo e 2 nella striscia terminale della cornicetta, e trovare che tale numero è 116 (= 6×19+2).

- Ci sono anche altri modi di organizzare la scomposizione della cornicetta e fare i calcoli corrispondenti (per es., partendo dalla figura del testo in cui si “contano” 9 quadretti neri, considerare i multipli di 9, arrivare a 54 e dedurre che, per avere gli altri 4 quadretti mancanti, la cornicetta deve continuare con un modulo completo di 3 quadretti neri e terminare con una striscia verticale di un quadretto nero e 2 grigi).

Oppure (procedura che sottintende un ragionamento di tipo proporzionale),

- osservare che in ogni striscia verticale (costituita da 3 quadretti), la parte nera corrisponde sempre ad un quadretto e quindi la parte grigia sempre al doppio, cioè a 2 quadretti. Di conseguenza sapendo che nella cornicetta finita la zona colorata di nero corrisponde a 58 quadretti, la parte colorata di grigio corrisponderà al suo doppio, cioè a 116 quadretti.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (116 quadretti) con disegno completo e correttamente colorato della cornicetta o una spiegazione chiara della procedura (determinazione di un modulo ripetuto e descrizione della parte finale della cornicetta, uso della “proporzionalità, ... con i calcoli effettuati)

3 Risposta corretta con spiegazioni insufficienti (disegno incompleto, procedimento di calcolo non ben esplicitato, …)

2 Risposta errata dovuta ad una non corretta interpretazione della fine della cornicetta

 oppure disegno completo e correttamente colorato, ma un errore di conteggio

 oppure risposta corretta senza disegno né spiegazione

1 Risposta errate dovuta ad un disegno errato dei moduli

 oppure inizio di ricerca con determinazione corretta dell’area della parte nera di un modulo

0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5, 6

Origine: Gruppo Algebra (rivisitazione del problema *La decorazione di Carlo*, 23.I.9)

**8. L’ORA DELL’OROLOGIO DIGITALE** (Cat. 5, 6, 7)

Una sera, alle ore 22:30, a causa di un forte temporale, salta la corrente a casa di Pietro.

Pietro possiede un orologio digitale alimentato con l’elettricità e una sveglia a batteria.

Dopo un minuto, la corrente ritorna e l’orologio si resetta, cioè riparte da 00:00.

Che ora segnerà l’orologio il mattino dopo, quando la sveglia segnerà le sette in punto?

Spiegate come avete trovato la risposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Determinare l’ora che segna un orologio digitale che a un dato momento si era fermato e che è ripartito da 00:00

Analisi del compito

- Sapere che un giorno è formato da 24 ore e che un’ora è formata da 60 minuti.

- Sapere che negli orologi digitali la mezzanotte viene indicata con 00:00.

- Comprendere che, mentre l’orologio si ferma alle 22:30, la sveglia continua a funzionare regolarmente.

- Comprendere che l’orologio ricomincia a funzionare alle 22:31.

- Calcolare che dalle 22:31 fino a mezzanotte passano un’ora e 29 minuti e che da mezzanotte alle sette del mattino passano 7 ore; aggiungere 1h 29 a 07:00 ottenendo 08:29 che corrisponde all’ora che segnerà l’orologio quando la sveglia segnerà le 07:00.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (ore 08:29) con spiegazione chiara e completa che mostra come è stato effettuato il calcolo del tempo

3 Risposta corretta con spiegazione confusa o approssimativa

2 Risposta corretta senza spiegazione

 oppure ragionamento corretto, ma risposta sbagliata (per esempio, errato calcolo dei minuti che mancano per arrivare a mezzanotte o calcolo errato delle ore da mezzanotte alle 07:00, oppure risposta 08:31 o 08.30)

1 Inizio di ragionamento corretto (ad esempio, i calcoli sono fatti solo con le ore (22:00-07:00, 23:00-07:00) senza la frazione di ora, oppure 1h 29 è sottratto da 07:00)

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Belluno

**9. I DRAGHI (Cat. 5, 6, 7)**

Su un’isola vivono tre draghi: uno rosso, uno giallo e uno verde. Ogni drago ha più teste.

Il drago rosso ha cinque teste meno del drago verde.

Il drago giallo ha quattro teste in più di quello verde e questi due insieme hanno 28 teste.

Quante sono le teste di ciascun drago?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra riposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Risolvere un sistema “elementare” di tre equazioni lineari in tre incognite con numeri naturali in un contesto immaginario di teste di draghi.

Analisi del compito

- Capire che i numeri delle teste di ogni drago non sono noti ma che, dalla prima condizione, si conosce la differenza, 5, tra i numeri delle teste del drago rosso e di quello verde e quindi questi numeri possono essere: 1 e 6, 2 e 7, 3 e 8, 7 e 12, … ; dalla seconda condizione non solo è nota la differenza, 4, tra il numero delle teste del drago giallo e di quello verde, ma anche la loro somma, 28.

- Cominciare a cercare il numero di teste dei draghi verde e giallo.

- Procedere per tentativi, partendo per esempio da 6 teste per il drago verde, e quindi 10 per il drago giallo, verificare che il totale (6 + 10) = 16 è diverso da 28 e proseguire con i tentativi, eventualmente organizzandoli (per esempio con una tabella), fino a trovare 12 teste per il drago verde e 16 per il giallo (12 + 16) = 28. Rendersi conto che i tentativi successivi “s’allontanano” da 28 e dunque che la soluzione è unica.

Oppure,

- procedere per deduzione, aiutandosi eventualmente con uno schema, sottraendo 4 da 28 per ottenere due numeri uguali la cui somma è 24, cioè 12 e 12, poi addizionare 4 ad uno di essi e trovare 16 e 12.

- Utilizzare poi la prima condizione che dice che il drago rosso ha 5 teste in meno del drago verde. Sapendo che il numero di teste del drago verde è 12, calcolare il numero di teste del drago rosso: 12 – 5 = 7.

- Concludere che il drago rosso ha 7 teste, il drago verde ha 12 teste e il drago giallo ne ha 16.

Oppure,

- dedurre dalla seconda condizione che il totale 28 comprende due volte il numero di teste del drago verde più le quattro che il drago giallo ha in più. Cercare quindi, per tentativi o con ragionamento aritmetico, o con l’aiuto di una rappresentazione grafica, il numero tale che il suo doppio aumentato di 4 dia 28 e capire che questo è il numero di teste del drago verde. Trovare quindi il numero di teste del drago rosso sfruttando la prima condizione: 12 – 5 = 7.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (7 per il drago rosso e 12 per il drago verde e 16 per il drago giallo) con una descrizione chiara della procedura (indicazione dei tentativi e della loro organizzazione, presentazione completa dei calcoli) che mostri che la soluzione trovata è unica

3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete o poco chiare (solamente qualche tentativo) o solamente una verifica

2 Risposta incompleta (16 per il giallo e 12 per il verde, dimenticato il rosso) con spiegazione chiara

 oppure risposta corretta per il numero delle teste del drago verde (12) e del drago giallo (16), ma errato il numero delle teste del drago rosso (17 = 12 + 5)

 oppure risposta corretta senza spiegazione né verifica

 oppure risposta che dimostra comprensione delle informazioni con spiegazioni adeguate per trovare la soluzione, ma errori di calcolo o imprecisioni nella risoluzione aritmetica

1 Inizio di ricerca corretta, per esempio qualche tentativo che mostri che le due informazioni sono state comprese, ma senza successo

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Bourg en Bresse

**10. I QUADRILATERI DI PATRIZIA** (Cat. 5, 6, 7, 8)

****Su ogni foglio del suo quaderno, Patrizia ha disegnato una griglia di punti 4x4.

Su uno di questi fogli, Patrizia ha poi disegnato questo quadrilatero.

Patrizia si chiede se è possibile disegnare altri quadrilateri convessi, della stessa area di quello sopra in figura, tutti differenti tra loro e con i vertici sui punti della griglia.

 Per esempio, eccone un altro: Questo non è convesso, ha un angolo “rientrante":

  

Questi quadrilateri non sono differenti da quello di Patrizia perché, se ritagliati dai loro fogli, possono essere tutti esattamente sovrapposti.

Disegnate altri quadrilateri convessi, tutti differenti tra loro, aventi la stessa area di quello di Patrizia e con i vertici sui punti della griglia.

Trovatene il più possibile e utilizzate per i disegni le griglie che vi servono tra quelle riportate qui sotto.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Su una griglia di punti 4x4, disegnare dei quadrilateri convessi, la cui area valga 2 quadretti della quadrettatura evidenziata dalla griglia stessa e i cui vertici siano situati sui punti della griglia.

Analisi del compito

Osservare gli esempi, verificare che il quadrilatero che Patrizia ha disegnato è convesso.

Determinare l’area del quadrilatero di Patrizia: 2 quadretti della quadrettatura evidenziata dalla griglia di punti. Questa area sarà anche quella di tutti i quadrilateri da disegnare.

Constatare che c’è un solo quadrilatero corretto formato da due quadrati interi (il rettangolo 1×2), poi rendersi conto che gli altri quadrilateri sono formati da metà di quadrati o di rettangoli.

Comprendere che per isometria non si ottiene un nuovo quadrilatero, ma che, facendo traslare orizzontalmente una base del rettangolo, si ottengono due parallelogrammi differenti la cui area vale 2 quadretti.



Per esempio l’area del secondo parallelogramma è la differenza tra l’area di un rettangolo 3×2 e le aree di due triangoli metà di un quadrato 2×2, e vale dunque 2 quadretti.

Trovare poi il quadrilatero i cui quattro lati sono obliqui. Quindi con una ricerca sistematica, costruire gli altri quadrilateri corretti aventi un lato coincidente con un lato della quadrettatura (tra questi c’è anche quello riportato come esempio nel testo):



E i tre seguenti più difficili da trovare:



In tutto fanno 12 quadrilateri, contando anche quello di Patrizia.

Attribuzione dei punteggi

4 Disegno di 9 o 10 nuovi quadrilateri corretti (senza quello di Patrizia e dell’esempio) e senza errori (un errore è una figura che non rispetta anche solo una delle cinque condizioni: quadrilatero, convesso, area 2, vertici sui nodi, diverso dagli altri cioè non doppio).

3 Disegno di 7 o 8 nuovi quadrilateri corretti e nessun errore

 oppure 9 o 10 nuovi quadrilateri corretti con un errore

2 Disegno di 4, 5 o 6 nuovi quadrilateri corretti e nessun errore

 oppure 7 o 8 nuovi quadrilateri corretti con un errore

 oppure da 9 o 10 quadrilateri corretti con due errori

1 Disegno di 2 o 3 nuovi quadrilateri corretti e nessun errore

 oppure da 4 a 10 nuovi quadrilateri corretti con al massimo tre errori

0 Un solo nuovo quadrilatero corretto

 oppure più quadrilateri corretti con più di tre errori

Livello: 5, 6, 7, 8

Origine: Suisse Romande

**11. LE PRUGNE** (Cat. 5, 6, 7, 8)

Carlo ha raccolto 117 prugne. Ne mette alcune in tre piatti portafrutta, uno piccolo, uno medio e uno grande.

Il numero di prugne che ha messo nel piatto medio è il doppio del numero di quelle che ha messo nel piatto piccolo. Il numero di prugne che ha messo nel piatto grande è il doppio del numero di quelle che ha messo nel piatto medio.

Dopo aver riempito i tre piatti, restano però delle prugne, il loro numero è esattamente la metà del numero di quelle che Carlo ha messo nel piatto grande.

Quante prugne ha messo Carlo in ogni piatto?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Ripartire il numero 117 in quattro numeri proporzionalmente a 1, 2, 4 e 2.

Analisi del compito

- Comprendere che le relazioni “doppio” e “ metà” sono inverse una dell’altra e che “il numero di prugne del piatto grande è il doppio di quello del piatto medio” significa anche che “il numero di prugne del piatto medio è la metà di quello del grande” e che, di conseguenza, il numero di prugne che restano è lo stesso di quello del piatto medio.

- Cercare 3 numeri, uno piccolo, uno medio, doppio del piccolo, e uno grande doppio del medio, tali che sommando un piccolo, due medi e un grande si trova 117.

- Per tentativi, a partire dal piatto piccolo, scrivere le quartine possibili: 1, 2, 4, 2; 2, 4, 8, 4; 3, 6, 12, 6; … e rendersi conto che occorre arrivare a 13, 26, 52, 26 per soddisfare la condizione che il totale sia 117.

Oppure,

- comprendere, eventualmente facendo ricorso ad una rappresentazione grafica, che il totale delle prugne, 117, si può esprimere in una stessa unità, per esempio il numero di prugne del piatto piccolo, per cui diventa 1 unità per il piatto piccolo, 2 unità per il medio, 4 unità per il grande e 2 per il resto, per un totale di 9 unità. Calcolare così il valore dell’unità: 117: 9 = 13 (piatto piccolo) e quindi 13 × 2 = 26 (piatto medio oppure resto), infine 13 × 4 = 52 (piatto grande).

Oppure,

- comprendere che, il numero totale delle prugne messe nei tre piatti è un numero divisibile per 7 e più piccolo di 117 (112, 105, 98, 01, 84, …). Considerando per esempio 112, si può ottenere la quantità di prugne in ogni piatto procedendo in questo modo: 112 : 7 = 16 (prugne nel piatto piccolo), 16 × 2 = 32 (prugne nel piatto medio, 16 × 4 = 64 (prugne nel piatto grande). Questa soluzione non è accettabile perché restano 5 prugne e non 32, come il numero del piatto medio.

 Con un numero totale nei piatti di 91 di prugne, si ha: 91 : 7 = 13 (nel piatto piccolo), 13 × 2 = 26 (nel piatto medio), 13 × 4 = 52 (nel piatto grande) e 117 − 91 = 26; il numero delle prugne rimaste fuori dai piatti è uguale al numero di prugne nel piatto medio.

Oppure,

- algebricamente: impostare e risolvere l’equazione nella quale l’incognita *x* è il numero di prugne nel piatto piccolo:
*x* + 2*x* + 4*x* + 2*x* = 117, da cui *x* = 117/9 = 13.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta esatta e completa (piatto piccolo: 13 prugne, piatto medio: 26 prugne, piatto grande: 52 prugne) con spiegazioni complete e chiare: i tentativi organizzati (e non a caso), o la menzione di un totale di 9 piatti piccoli, o una rappresentazione grafica di una ripartizione con le unità ben visibili

3 Risposta esatta e completa con spiegazioni incomplete o poco chiare (per esempio, la divisione 117: 9 senza spiegare cosa rappresenta il 9, o tentativi a caso senza far apparire l’unicità della soluzione)

2 Risposta corretta senza spiegazione

 oppure procedimento corretto, ma con un errore di calcolo durante la risoluzione

1 Inizio di ricerca coerente con alcuni tentativi ma senza arrivare alla soluzione, o con la sola affermazione che il resto è uguale al contenuto del piatto medio

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7, 8 Origine: Gruppo Calcolo e Proporzionalità, variante di *Le castagne di Carlo,* 22.II.09

**12. I COMPLEANNI** (Cat. 6, 7, 8)

Martina e suo padre Marco festeggiano il loro compleanno lo stesso giorno.

Quest'anno, il 2017, le loro età si possono scrivere con le stesse due cifre: Martina compie 37 anni e Marco 73 anni.

Ci sono già stati altri compleanni in cui le loro due età si potevano scrivere con le stesse cifre? E ce ne saranno ancora dopo il 2017?

Scrivete le due età di Martina e Marco per ciascuno di questi altri compleanni e spiegate come le avete trovate.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tutte le possibili coppie di numeri a due cifre in cui la cifra delle decine dell’uno corrisponde alla cifra delle unità dell’altro e viceversa e che differiscono sempre di uno stesso numero.

Analisi del compito

- Per capire il problema occorre comprendere che ogni anno le loro età cambiano e aumentano di una unità, quindi il prossimo anno avranno 38 e 74 anni, il successivo 39 e 75 anni e così via; che le età avanzano allo stesso ritmo nel tempo e che lo scarto resta costante; la differenza delle età 73 – 37 = 36 resta sempre la stessa.

- Partire, ad esempio, da 0 e 36 o da 10 e 46.

- Si possono costruire due successioni in relazione, del tipo:

 Martina 0 … 3 … 4… **15**… **26** … **37**… **48** … **59** ...70... 81

 Marco 36 39…. 40… **51** ... **62** ... **73** … **84** … **95** ...106 ... 117

 e trovare così tutte le soluzioni.

- È necessario saper limitare le due successioni: 64 e 100 (e numeri superiori) vanno esclusi perché non rispettano la condizione “ numeri a due cifre”; lo stesso 09 e 45 (e numeri precedenti).

- Si può anche osservare che per trovare tutte le età che interessano bisogna ogni volta aggiungere 11 anni a ogni numero della coppia (15,51): (26,62); (37,73); (48,84); (59,95).

Oppure,

- partire dalla differenza 36 fra 73 e 37; cercare i numeri in cui la differenza tra le cifre delle unità è 6 (per es. 11−5 = 6; 12−6 = 6; 13−7 = 6; 14−8 = 6; 15−9 = 6) e poi dedurre che le cifre della decina possono essere ottenute tramite lo scambio con quelle dell’unità. Per esempio, partendo da 14−8 = 6, vedere che 84 e 48 vanno bene.

Oppure,

- escludere tutte le età di Martina minori di 10; tentare di invertire le cifre a partire da 12 e comprendere che la differenza aumenta sempre di 9, fino ad arrivare a 15 e 51, in cui la differenza è veramente di 36. Comprendere che oltre il 15 la differenza aumenta. Passare alla decina seguente, partendo da 23 e trovare 26 e 62, la cui differenza è 36. Si comprende a questo punto che c’è una regolarità; arrivare così alle età indicate nel testo, 37 e 73; le altre età che vanno bene saranno 48 e 84, 59 e 9, poiché ogni volta le età aumentano di 11 (una decina più una unità).

Oppure,

- basandosi sulle caratteristiche della scrittura posizionale in base dieci del numero, supporre che l’età di Marco sia 10a+b e quindi l’età di Martina 10b + a (a e b essendo numeri interi tra 0 e 9 con a > b perché Marco è più vecchio).

- Si deve avere 10a + b = 10b + a + 36, da cui 9(a−b) = 36 e quindi a–b = 4. Il caso b = 0 è escluso perché si devono trovare numeri a due cifre. Si trova dunque b = 1 e  a = 5 (15 anni e 51 anni), b = 2 e a = 6 (26 anni e 62 anni), b = 3 e a = 7 (esempio dato nell’enunciato), b = 4 e a = 8 (48 anni e 84 anni), b = 5 e a = 9 (59 anni e 95 anni).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (“sì”, prima del 2017: 15-51; 26-62; “sì”, dopo il 2017: 48-84; 59-95) con una spiegazione dettagliata (per esempio, tentativi ordinati con età crescenti)

3 Risposte corrette (le quattro coppie) con spiegazioni incomplete (per esempio solo qualche tentativo)

 oppure trovate tre coppie (esclusa quella data) con spiegazione dettagliata

2 Trovate tre coppie (esclusa quella data) con spiegazioni incomplete

 oppure due coppie con spiegazione dettagliata

 oppure risposte corrette senza spiegazione

1 Inizio ricerca organizzata

 oppure trovate tre coppie senza alcuna spiegazione

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8 Origine: Riva del Garda (rivisitazione dei problemi *Candeline*, 11.F.7 e *Compleanni e candeline*, 16.F.14)

**13. UNA SCATOLA PARTICOLARE** (Cat. 7, 8, 9, 10)

Giovanni vuole costruire una scatola a sei facce. È una scatola di forma particolare che vuole usare per fare un regalo a sua sorella.

Per costruirla utilizza le quattro facce che vedete disegnate qui sotto e vuole farne altre due per chiuderla. Egli desidera che ogni faccia che non ha ancora disegnato abbia un solo asse di simmetria.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Disegnate sul foglio quadrettato che segue le facce che mancano per completare la scatola.

Spiegate come le avete trovate.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

analisi a priori

Compito matematico

Riconoscere che un solido è un prisma retto a partire da 4 delle sue facce rettangolari. Disegnare le sue altre due facce sapendo che esse hanno un solo asse di simmetria.

Analisi del compito

- Capire che bisogna cominciare analizzando le informazioni date dalle misure dei quattro rettangoli.

- Comprendere che, a partire dalle quattro facce rettangolari date, si può costruire un prisma retto.

- Comprendere che le facce date sono facce laterali e che le due facce da disegnare sono le due basi identiche non rettangolari.

- Osservare che due dei quattro rettangoli hanno misure identiche e che tutti e quattro i rettangoli hanno una misura in comune.

- Fare dei tentativi di posizionamento delle facce le une in rapporto alle altre: provare a mettere su piani paralleli i due rettangoli delle stesse dimensioni e constatare che le altre due facce già disegnate non si adattano a questa disposizione. Dedurne che così non si può costruire il solido cercato.

- Comprendere che è possibile posizionare le facce date le une a fianco delle altre utilizzando la loro misura comune e capire, chiudendo la costruzione, che le facce mancanti saranno le basi di un prisma retto.

- Riorganizzare il posizionamento delle facce date in modo che le facce mancanti abbiano un asse di simmetria.

- Riconoscere che le basi saranno quindi dei trapezi isosceli le cui dimensioni si deducono dai rettangoli già dati.

- Disegnare le figure rispettando le misure.

- Costruendo un triangolo rettangolo all’interno del trapezio, verificare con la terna pitagorica 6, 8, 10 che l’altezza del trapezio è di 8 lati di quadretto, il lato obliquo di 10 e la base maggiore di 14 = 6 + 2 + 6.



Attribuzione dei punteggi

4 Disegno corretto delle due facce mancanti o di una sola, indicando che l’altra è identica (un trapezio isoscele con i lati di misura 10-2-10-14 in lati di quadretto), con spiegazioni chiare

3 Disegno dei due trapezi isosceli ma con la misura errata dei lati obliqui

 oppure disegnato correttamente un solo trapezio isoscele senza specificare che l’altra faccia mancante è ad esso congruente

2 Disegno di un trapezio isoscele con tutte le misure errate, ma con spiegazioni

 oppure disegno di un quadrilatero irregolare che rispetta le misure dei lati (4,10,10,14) ma che non rispetta la condizione di avere un asse di simmetria

1 Inizio di ragionamento corretto con costruzione di un quadrilatero che verifica due delle misure

 oppure dichiarazione verbale che si tratta di un trapezio isoscele

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Gruppo Geometria dello spazio

**14. IL TAVOLO TRIANGOLARE** (Cat. 7, 8, 9, 10)

Un tavolo di legno ha la forma di triangolo equilatero.

La sua superficie è composta da parti in legno scuro e da parti in legno chiaro. Le parti in legno scuro sono degli esagoni regolari e le parti in legno chiaro dei triangoli, come mostra la figura.



Giuseppe si è divertito a calcolare l’area dell’esagono grande che è 4158 cm2 e ora vuole calcolare l’area degli esagoni più piccoli.

Qual è, in cm2, l’area totale dei tre esagoni piccoli?

Spiegate come l’avete trovata.

Analisi a priori

Compito matematico

Determinare l’area della superficie di tre piccoli esagoni regolari uguali conoscendo l’area di un esagono regolare avente la lunghezza dei lati tripla di quella dei lati degli esagoni piccoli. Tutti gli esagoni sono all’interno di un triangolo equilatero.

Analisi del compito

- Rendersi conto che i tre triangoli piccoli che hanno un lato coincidente con un lato dell’esagono sono equilateri e uguali (ad esempio, osservare che ciascuno di loro ha tre angoli uguali: i lati dell’esagono regolare sono paralleli ai lati del triangolo grande e di conseguenza gli angoli di un triangolo piccolo sono uguali a quelli del triangolo grande che è equilatero; oppure si può anche considerarli come supplementari agli angoli degli esagoni regolari che sono di 120° ciascuno) .

- Il lato dell’esagono grande è quindi 1/3 del lato del triangolo grande.

- Il triangolo grande si può dividere in 9 triangoli equilateri uguali (6 formati a partire dal centro dell’esagono e 3 nella parte rimanente).

- Conoscendo l’area dell’esagono, è possibile quindi calcolare l’area di uno di questi triangoli: 4158 : 6 = 693 (in cm2).

 Analogamente ciascuno di questi triangoli si può scomporre in 9 triangoli piccoli dei quali 6 formano l’esagono più piccolo: 693 : 9 = 77 (in cm2).

 L’area di un esagono piccolo è quindi 77 × 6 = 462 (in cm2). Quella complessiva dei tre esagoni piccoli è quindi:

 462 × 3= 1386 (in cm2).

Oppure,

- osservare che ciascuno dei 9 triangoli può essere considerato composto da altri 9 triangoli piccoli, uguali tra loro. Quindi la superficie dell’esagono è formata da 54 triangoli piccoli di area 4158 : 54 = 77 (in cm2). L’esagono piccolo ha quindi area 77 × 6 = 462 (in cm2). I tre esagoni, complessivamente, hanno allora area 462 × 3= 1386 (in cm2).

Oppure,

- rendersi conto che si possono inserire 7 esagoni nell’esagono grande e che restano 12 triangoli equilateri piccoli che possono formare ancora due esagoni. L’area dell’esagono grande è quindi uguale a quella di 9 esagoni piccoli, questo implica che un esagono piccolo ha un’area di 462 cm² (4158/9). Resta da moltiplicare questo numero per 3 per ottenere la risposta.

Oppure,

- considerare che, essendo il lato di ciascun esagono piccolo pari a 1/3 di quello dell’esagono grande, l’area di ogni esagono piccolo sarà 1/9 di quella dell’esagono grande, cioè 1/9 di 4158 (in cm2) e dunque 462 (in cm2). I tre esagoni, complessivamente, avranno area 462 × 3= 1386 (in cm2).

Oppure,

- è possibile trovare il risultato esatto (1386 cm2) a partire dalla formula dell’area dell’esagono che fa intervenire dei radicali, che possono però condurre a risultati approssimati (per es. 1385 cm2) se vengono sostituiti con numeri decimali.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (1386 cm2) con spiegazioni chiare e complete della procedura seguita

3 Risposta corretta con spiegazioni parziali (per esempio, non si precisa che i triangoli sono equilateri e uguali)

 oppure risposta 1385 cm2 per l’approssimazione nei calcoli, con spiegazioni chiare e complete della procedura seguita

 oppure risposta 462 cm2 (calcolo dell’area di un solo esagono piccolo) con spiegazioni chiare e complete

2 Procedimento corretto con errori di calcolo ma con spiegazioni chiare e complete

 oppure risposta 461 cm2 (area di un solo esagono piccolo) per l’approssimazione nei calcoli, con spiegazioni chiare e complete

 oppure risposta corretta senza spiegazioni

1 Inizio di ricerca coerente (ad esempio, divisione dell’esagono in 6 triangoli equilateri uguali e calcolo della loro area)

 oppure risposta ottenuta utilizzando delle misure per trovare che il lato dell’esagono grande è un terzo del lato del triangolo grande

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Puglia

**15. BARATTOLO DI FAGIOLI** (Cat. 8, 9, 10)

Marco chiede al suo amico Carlo il numero esatto di fagioli contenuti in un barattolo di vetro, sapendo che:

- il numero cercato è compreso fra 1400 e 1700;

- se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno;

- se si raggruppano i fagioli per 3, i mucchietti formati sono completi;

- se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti;

- se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli.

Qual è il numero dei fagioli contenuti nel barattolo?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare l’unico numero compreso tra 1400 e 1700 sapendo che i resti delle divisioni di questo numero per 2, 3, 5 e 7 sono, rispettivamente, 1, 0, 2 e 5.

Analisi del compito

- Capire che, trattandosi di un numero elevato, è estremamente improduttivo lavorare operativamente con oggetti o disegni, per cui è opportuno ricorrere alla scrittura di numeri e a relazioni numeriche.

- Trovare un metodo di eliminazione o di scelta che eviti di eseguire troppe divisioni per determinare i resti.

- La ricerca va fatta su tutti i numeri compresi fra 1400 e 1700, eliminando di volta in volta quelli che:

- terminano con una cifra pari (0, 2, 4, 6, 8) per rispettare la seconda condizione,

- non sono divisibili per 3 per rispettare la terza condizione,

- non terminano per 7 per rispettare la quarta condizione (la cifra delle unità di un multiplo di 5 diminuito di 3 è 7 o 2, quest’ultima da eliminare per la seconda condizione).

- A questo punto scrivere tutti i numeri dispari compresi fra 1400 e 1700 che terminano con la cifra 7 e che sono multipli di 3. Si può ridurre l’insieme dei numeri da esaminare per trovare i multipli di 3, considerando che se *d* e *c* indicano le cifre delle decine e delle centinaia del numero cercato, allora 1+*c*+*d*+7 deve essere un multiplo di 3, con *c* + *d*  ≤ 18. Si ottengono così: 1407, 1437, 1467, 1497, 1527, 1557, 1587, 1617, 1647, 1677.

- Infine, trovare che solo il numero 1587 soddisfa alle cinque condizioni: (226 × 7) + 5 = 1587.

Oppure,

- scrivere tutti i multipli di 7 aumentati di 5 fra 1400 e 1700, eliminare tra questi i numeri pari e conservare solo quelli che finiscono con 7 (1447, 1517, 1587, 1657) per arrivare a 1587, che è l'unico ad essere anche multiplo di 3.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (1587) con i dettagli di una ricerca sistematica

3 Risposta corretta con dettagli di una ricerca non esaustiva

2 Risposta corretta senza spiegazione o risposta sbagliata a causa di un errore di calcolo in una ricerca sistematica

1 Inizio di ricerca corretta

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Riva del Garda e *Il sacchetto di biglie,* 10.II.13

**16. LA SIGNORA FARFALLA** (Cat. 8, 9, 10)

La Signora Farfalla è fiera delle sue grandi ali simmetriche.

Ieri, però, a causa di un forte colpo di vento, le sue ali sono state deformate, come si vede nella figura di destra qui sotto.



(le misure sono in cm)

Secondo voi, il colpo di vento ha cambiato l’area delle ali?

Giustificate la vostra risposta e calcolate le aree delle ali prima e dopo il colpo di vento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Riconoscere i triangoli formati dai lati e dalle diagonali di trapezi le cui misure delle basi (8 e 12) e dell’altezza (15) sono date, calcolare le loro aree e constatare che sono indipendenti dalla misura degli angoli del trapezio.

Analisi del compito

- Per ciascuna delle due figure, osservare che i triangoli formati da un’ala grigia e da un triangolo bianco piccolo hanno una base di 8 cm e l’altezza corrispondente di 15 cm, quindi hanno la stessa area. Dedurne che in ciascuna figura, le due ali grigie hanno la stessa area. Resta da confrontarle nel passaggio da una figura all’altra. Si può anche lavorare con il triangolo bianco grande.

Metodo sperimentale:

- riprodurre su un foglio di carta quadrettato le due figure della farfalla e le due rette parallele esprimendo le misure date, 15, 12 e 8, in lati di quadretto. Rendersi conto sperimentalmente che, in ciascuna farfalla, le due ali si intersecano in un punto che dista 6 lati di quadretto dalla retta in basso e 9 dalla retta in alto.

- Verificare che tali valori sono corretti perché calcolando l’area delle due ali di una stessa farfalla si trova lo stesso valore (36 in quadretti), prima partendo dall’area del triangolo formato da un’ala e dal triangolo bianco piccolo e togliendo l’area di quest’ultimo, poi partendo dall’area del triangolo formato da un’ala e dal triangolo bianco grande e togliendo l’area di quest’ultimo. Dedurne che il colpo di vento non ha cambiato le aree delle ali.

Osservazione: le misure prese direttamente sulle figure nel testo non possono portare al calcolo dell’area delle ali, né alla conclusione che le aree dei triangoli grigi sono le stesse, a causa delle inevitabili approssimazioni.

Metodo algebrico per il calcolo dell’area di un’ala:

- osservare che le ali della Signora Farfalla sono inscritte in due trapezi di basi 12 cm e 8 cm e di altezza 15 cm e quindi di stessa area (*A* = (12 + 8) × 15 / 2 = 150 cm2).

- Qualunque sia la figura considerata, indicare, per es., con *a* l’area di una delle due ali, con *h* l’altezza del triangolo piccolo, con *H* quella del triangolo bianco grande, e con *A* l’area del trapezio. Per le due figure, si hanno le relazioni: *H* + *h* = 15 ; *A* = 2*a* + 4*h* + 6*H* e *a* = 4×15 – 4*h*. Ricavare l’equazione in *h* : 8×15 – 8*h* + 4*h* + 6(15 – *h*) = 150, da cui *h* = 6.

- Per le due figure, l’area di un’ala è quindi uguale a 4 × 15 – 4 × 6 = 36 cm2. Il colpo di vento non ha cambiato le aree delle ali.

Metodo geometrico per il calcolo dell’area di un’ala:

- dopo aver dimostrato che, per ogni farfalla, le due ali hanno la stessa area, lavorare sulla figura di sinistra e osservare che la diagonale AC (o analogamente la diagonale BD) divide il trapezio ABCD in due triangoli, ACB e ACD. Il triangolo ACB ha area 8 × 15 / 2 = 60 cm2 e il triangolo ACD ha area 12 × 15 / 2 = 90 cm2.

- Poiché ciascuno di questi triangoli è formato da un triangolo grigio e da uno bianco e i triangoli grigi sono equivalenti, la differenza tra le aree (30 cm2) è dovuta alla differenza tra le aree dei triangoli bianchi.



- Sia B’KA’ il triangolo simmetrico di AKB rispetto a K. L’area del trapezio A'B'CD è quindi uguale alla differenza delle aree dei triangoli AKB e DKC. L’altezza di questo trapezio è *h* = 30 × 2 / (12 + 8) = 3 cm. L’altezza del triangolo AKB è di conseguenza uguale a (15–3) / 2 = 6 cm e quella del triangolo DKC è uguale a 9 cm.

- Si può quindi calcolare l’area delle ali della farfalla (36 cm2 ciascuna), per esempio per differenza tra l’area del triangolo DAB (15 × 8/2) e quella del triangolo piccolo bianco KAB (6 × 8/2).

 Eventualmente considerare la retta passante per i centri delle ali, e ipotizzare intuitivamente che sia parallela alle altre due (si veda disegno più sopra).

 Comprendere allora che i triangoli bianchi piccoli nelle due figure hanno la stessa area, poiché hanno le basi della stessa lunghezza (8 cm) e la stessa altezza. Analogamente per i triangoli bianchi grandi. Poiché i triangoli formati da un’ala grigia e da un triangolo bianco piccolo hanno la stessa area, dedurre che le 4 ali disegnate nelle due figure hanno la stessa area e che il colpo di vento non ha modificato l’area delle ali della Signora Farfalla.

Oppure (soluzioni esperte),

- osservare che nella figura a sinistra come in quella a destra, i due triangoli bianchi sono simili (angoli corrispondenti uguali) o omotetici (il centro di omotetia è il vertice comune dei triangoli grigi) il cui rapporto è uguale a quello delle loro basi (che sono delle stesse lunghezze nelle due figure): 8/12 = 2/3. Le loro altezze sono pertanto anch'esse nello stesso rapporto, 2/3. La distanza tra le due basi, 15 cm, è la somma dell'altezza del triangolo bianco grande e di quella del triangolo bianco piccolo, che è i 2/3 di quella del grande, cioè 1 + 2/3 = 5/3 dell'altezza del triangolo bianco grande. Si possono così dedurre le due altezze dei triangoli bianchi: quella del grande 15 : 5/3 = 9 cm e quella del piccolo 15 : 5/2 = 6 cm.

Oppure,

- per il teorema di Talete, ponendo *x* = altezza del triangolo bianco piccolo e 15 – *x* = altezza del triangolo bianco grande, si ottiene l’equazione: (15 – *x*)/*x* = 12/8 per trovare *x* = 6 cm.

- Le aree dei triangoli bianchi sono dunque, per il grande: (12 × 9)/2 = 54 (in cm2) e per il piccolo (8 × 6)/2 = 24 (in cm2).

- Infine, calcolare l’area dei triangoli grigi, che è la stessa nella figura simmetrica come nell’altra, per ciascuna delle quattro ali della figura. Per esempio, partendo dal triangolo formato dal triangolo bianco piccolo e da un triangolo grigio, si trova: (8 × 15 /2) – 24 = 36 (in cm2).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (“no”, il colpo di vento non ha cambiato l’area delle ali che è, per ciascuna, di 36 cm2) con giustificazione completa, teorica o sperimentale

3 Risposta corretta con giustificazione incompleta (per esempio, non si spiega perché le altezze dei triangoli bianchi sono 6 cm e 9 cm)

2 Risposta corretta (“no”, il colpo di vento non ha cambiato l’area delle ali che è, per ciascuna, di 36 cm2)senza giustificazione

 oppure risposta “no” con giustificazione, ma senza il calcolo delle aree

 oppure risposta “no” e con il calcolo delle aree errato a causa di un errore sulle altezze dei triangoli bianchi, con giustificazione

 oppure risposta corretta “no” che ricorre all’ipotesi della retta passante per i centri delle ali

1 Risposta errata con aree tra loro diverse a partire da misure prese sulla figura

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Gruppo Geometria piana

**17. UN COLLE ALPINO IN BICICLETTA** (Cat. 9, 10)

Un ciclista sale su un colle alpino percorrendo 12 km alla velocità media di 20 km/h, poi scende subito per la stessa strada.

A quale velocità media deve scendere dal colle affinché la sua velocità media in questo viaggio di andata e ritorno sia uguale a 30km/h?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare la velocità media di un mezzo su un tratto di percorso conoscendo le velocità medie sulla parte complementare di questo tratto e sull’intero percorso.

Analisi del compito

**-** Comprendere che per trovare la velocità del ciclista sui 12 km di discesa, occorre conoscere il tempo che impiega per fare questa discesa.

**-** Osservare che si può conoscere il tempo di discesa se si conosce il tempo della salita e quello impiegato per compiere andata e ritorno.

Risoluzione con il calcolo del tempo di discesa:

- per salire il colle, il ciclista ha fatto 12 km alla velocità di 20 km/h. Egli ha percorso dunque 1 km in 1/20 di ora ed ha quindi impiegato 12/20 = 0,6 h (cioè 36 minuti).

- Per percorrere i 24 km di andata e ritorno alla velocità media di 30 km/h, egli deve impiegare 24/30 di ora = 0,8 h e quindi deve percorrere la discesa in 0,8 − 0,6 = 0,2 h = 12 min.

- Il ciclista deve dunque fare i 12 km di discesa alla velocità di 12/0,2 = 60 km/h.

Oppure (risoluzione per tentativi),

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Se la velocità di discesa è uguale a | allora il tempo impiegato per fare i 12 km è uguale a  | Il tempo di salita dei 12 km è uguale a  | Il tempo impiegato per l’andata e il ritorno è uguale a | La velocità media per l’andata e il ritorno è uguale a  |
| 40 km/h | 0,3 h | 0,6 h | 0,9 h | 24/0,9 = 26,7 km/h |
| 50 km/h | 0,24 h | 0,6 h | 0,84 h | 24/0,84 = 28,57 km/h |
| 60 km/h | 0,2 h | 0,6 h | 0,8 h | 24/0,8 = 30 km/h |

- Dalla tabella segue che l’unica risposta possibile è 60 km/h.

Oppure (risoluzione algebrica),

- conoscere la relazione tra la distanza *d* percorsa da un mezzo, il suo tempo di percorrenza *t* e la sua velocità media *v* su questo percorso: *d = v t*.

- Comprendere, o verificare con il calcolo, che la velocità media su un percorso non può essere uguale alla media delle velocità sulle due porzioni complementari.

- Se si indica con *td* il tempo in ore impiegato dal ciclista per discendere i 12 km del valico e con *vd* la velocità media richiesta in km/h, si ha: *d = vd td*.

- Poiché si desidera fare l’andata e il ritorno, 24 km, alla velocità media *v* = 30 km/h, si ha: 2*d = v*(*tm + td*), che dà: 24 = 30 (0,6 + *td*), da cui *td* = 24/30 – 0,6 = 0,2 e vd = 12/*td* = 12/0,2 = 60. La velocità richiesta è quindi 60 km/h.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (60 km/h) con spiegazioni chiare

3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare o errore numerico in un calcolo

 oppure risposta corretta con tentativi male organizzati

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione

1 Inizio di ragionamento corretto: almeno il calcolo del tempo impiegato dal ciclista per salire il colle

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Franche-Comté

**18. ROBOT-ALFA** (Cat. 8, 9, 10)

Robot-Alfa si muove compiendo passi della stessa lunghezza e impiega 3 secondi per ogni passo.

Il robot è stato programmato per spostarsi lungo i lati di trapezi isosceli uguali, tracciati su un nastro gli uni di fianco agli altri, come mostra la fig. 1.



Per percorrere la base maggiore del trapezio, robot-Alfa impiega 9 passi in più che per il lato obliquo, mentre per percorrere il lato obliquo gli occorrono 4 passi in meno che per fare due volte la base minore.

Oggi, robot-Afa è partito da A ed è andato avanti e indietro da A a B, lungo il percorso indicato in fig.2, per 10 ore consecutive e senza mai fermarsi.



Per percorrere il tratto più lungo del percorso, quello da Ca D*,*  robot-Alfa ha fatto 52 passi.

Quante volte robot-Alfa è passato per B prima di fermarsi?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare quante volte un oggetto mobile, che va avanti ed indietro da un punto A ad un punto B, passa per B spostandosi su un percorso definito sui lati di trapezi uguali, noti la velocità, il tempo e alcune relazioni tra le lunghezze di certi tratti del percorso.

Analisi del compito

- Comprendere che il robot, per percorrere segmenti della stessa lunghezza, impiegherà lo stesso numero di passi perché i suoi passi hanno sempre la stessa lunghezza.

- Tenere presente che sono noti la velocità del robot (3 secondi per ogni passo) e il tempo in cui il robot è in movimento (10 ore).

- Osservare che il tragitto tra A e B evidenziato in fig. 2 coinvolge sia lati obliqui che basi dei trapezi isosceli.

- Capire che occorre determinare la lunghezza in numero di passi per andare da A a B e che per fare questo è necessario sfruttare le relazioni date tra il numero di passi necessari a percorrere i lati del trapezio, ma anche l’informazione sul numero di passi (52) effettuati tra i punti C e D del percorso indicato.

- Ci sono diversi modi di procedere. Osservare che la lunghezza CD è composta di due basi maggiori e di due basi minori del trapezio. Poiché una base maggiore vale “9 passi in più di un lato obliquo” che vale “4 passi in meno di due basi minori”, si ricava che una base maggiore vale quanto “due basi minori più 5 passi”. La lunghezza CD, di 52 passi, vale allora “due basi minori” più due volte “due basi minori più 5 passi”, cioè “6 basi minori più 10 passi”. Si deduce quindi che una base minore vale 7 passi ((52 – 10)/6). Di conseguenza un lato obliquo vale 10 passi e una base maggiore 19 passi.

Oppure,

- utilizzare una rappresentazione grafica per illustrare le relazioni tra i numeri di passi sui diversi lati del trapezio.

Oppure,

- adottare un linguaggio più formalizzato con un sistema di tre equazioni in tre incognite. In quest’ultimo caso, indicati ad esempio, con *B*, *b* e *l* le incognite esprimenti, rispettivamente, il numero di passi per base maggiore, base minore e lato obliquo del trapezio, il sistema è dato dalle equazioni:

 *B = l + 9, l = 2b −4, 2(b + B) = 52* da cui si ottiene la soluzione *B = 19, l = 10 b = 7.*

- Ricavare che la lunghezza del percorso da A a B è di 154 passi (4*B*+4*b*+5*l*).

- Calcolare il tempo impiegato dal robot a percorrere il tragitto tra A e B: 462 (= 3×154) secondi e determinare quindi il numero di tragitti tra A e B effettuati dal robot in 10 ore = 36.000 secondi, tramite la divisione con resto di 36.000 per 462. Si ottiene 77 con resto di 426. Dedurre quindi che il robot ha percorso 77 volte la distanza tra A e B (in andata o in ritorno) e che avanzano ancora 426 secondi, corrispondenti ad altri 142 (= 426 :3) passi, che però non concludono il suo 78-esimo tragitto.

- Osservare che un tragitto del percorso tra A e B di rango dispari parte da A (il primo, il terzo,…) e uno di rango pari parte da B (il secondo, il quarto,…). Il robot- Alfa è dunque passato 39 volte da B (78/2).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (39 volte) con spiegazione chiara del procedimento (determinazione della lunghezza del percorso e calcoli corretti e chiaramente interpretati)

3 Risposta corretta e completa con spiegazione poco chiara

 oppure ragionamento corretto e ben spiegato, ma con un errore di calcolo

2 Determinata correttamente la lunghezza dei tre lati del trapezio con spiegazione chiara

 oppure risposta corretta senza alcuna spiegazione

1 Inizio di ragionamento corretto (es., relazioni tra i lati del trapezio interpretate correttamente e qualche tentativo di calcolo)

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Gruppo Algebra (rivisitazione del problema *“Il Robot Arturo”*, 20.II.2)

**19. VINCERE CON UN DADO** (Cat. 9, 10)

Il professore di matematica pone un problema di probabilità.

*“*Si lancia un dado cubico tradizionale. Se si ottiene la faccia 6, si vince. Se no, si ha diritto di lanciarlo una seconda volta e se si ottiene la faccia 6, si vince. Altrimenti si perde. Quale probabilità si ha di vincere?”

Gianni dà la sua risposta: *“O io ho un 6 al primo lancio ed ho vinto, oppure io non ho 6 al primo lancio ed ho 6 al secondo ed ho ugualmente vinto. Altrimenti ho perso. Ci sono due casi su tre in cui vinco, dunque ho due possibilità su tre di vincere”.*

Dite se Gianni ha torto o ragione. In ogni caso, date la vostra risposta al problema del professore e spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Lanciando un dado due volte, determinare la probabilità di ottenere almeno una volta un 6.

Analisi del compito

- Comprendere intuitivamente che Gianni ha torto, poiché non c’è che una possibilità su sei di ottenere un 6 in un lancio, perciò meno di 2 su 6 in due lanci.

- tutte queste coppie hanno la stessa probabilità di uscire: 1/36.

- Contare le coppie di facce che fanno perdere, cioè quelle che non presentano la faccia 6: a ciascuna delle 5 facce che fanno perdere al primo lancio, associare le 5 facce che fanno perdere al secondo lancio. Trovarne 25 (5×5). Concludere che ci sono 25 possibilità di perdere su 36. Dedurre che ci sono 36 – 25 = 11 possibilità di vincere su 36.

Oppure,

- immaginare, che Gianni lanci il dado una seconda volta anche se ha ottenuto un 6 al primo lancio. Contare le coppie di facce del dado che fanno vincere tra le 36 possibili: quelle che cominciano con un 6 e quelle che non cominciano con 6 ma presentano un 6 al secondo lancio. Trovarne 11. Concludere che ci sono 11 possibilità su 36 di vincere.

Oppure,

- ricorrere ad una rappresentazione grafica (per es., un grafo ad albero),

Oppure,

- calcolare la probabilità di ottenere 6 al primo lancio (1/6) e la probabilità di ottenere 6 al secondo sapendo che non si è ottenuto 6 al primo (5/6 × 1/6). Dedurre la probabilità di vincere a questo gioco: 1/6 + 5/6 × 1/6 = 11/36.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Gianni ha torto: la probabilità di vincere è 11/36, oppure ci sono 11 possibilità di vincere su 36) con spiegazione chiara e completa (una descrizione dettagliata dei diversi casi e del modo di fare il calcolo)

3 Risposta corretta con una spiegazione poco chiara o incompleta

2 Risposta: “Gianni ha torto”, con una spiegazione intuitiva senza valore numerico

 oppure conteggio corretto dei casi nei quali si perde (25) con o senza spiegazione

1 Risposta errata nel calcolo della probabilità dovuta a un errore di conteggio, ma procedura corretta (per esempio 12 possibilità su 36 contando due volte il doppio 6)

0 Risposta: “Gianni ha ragione” o incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Franche-Comté