24° Rally Matematico Transalpino – Udine – prova finale

	Titolo	*Categorie*								*Origine*	*Ambiti*
1	La collana di Paola	3								SI	Aritmetica: somma, metà
2	Collezionisti	3	4							SI	Deduzioni, relazioni d'ordine
3	Matematica in palestra	3	4							SI	Aritmetica: ripetizioni di successioni, divisione
4	Cercate la bestiolina	3	4	5						BB	Aritmetica, equazioni
5	Il pasticciere	3	4	5						13e RMT-I	Deduzioni
6	Piramidi		4	5						SI	Geometria: impilamenti, aritmetica
7	Il quadrato cambia forma! (I)		4	5						SI	Geometria: costruzione di poligoni, isometria
8	I fiammiferi			5	6					BB	Geometria: perimetri
9	Otto triangoli in un quadrato			5	6					RZ, fj	Geometria: suddivisioni in triangoli congruenti
10	I cioccolatini di Zoe			5	6	7				BB	Aritmetica: numeri con 5 divisori
11	Date particolari				6	7				SI	Aritmetica
12	Collezione di cartoline				6	7	8			PU	Aritmetica: divisione euclidea
13	Piramidi bicolori				6	7	8	9		SI	Somme di quadrati di numeri pari e dispari
14	Il quadrato cambia forma! (II)				6	7	8	9	10	SI	Geometria: unione di due poligoni, isometrie
15	Quadrati magici moltiplicativi					7	8	9	10	AO	Potenze del 2, proprietà delle potenze
16	Triangoli sconosciuti					7	8	9	10	SR	Triangoli isoperimetrici, disuguaglianza triangolare
17	Minestra in promozione						8	9	10	FC	Geometria in 3D, percentuali
18	Il tapis roulant						8	9	10	F	Velocità, spazio, tempo

1. LA COLLANA DI PAOLA (Cat. 3)

Paola ha una collana composta da 24 perle rosse.

Vuole realizzare una collana più lunga utilizzando queste 24 perle rosse e aggiungendo altre perle rosse e delle perle gialle.

Aggiunge lo stesso numero di perle rosse e di perle gialle.

La sua nuova collana ha in tutto 50 perle.

Quante perle rosse ci sono nella nuova collana di Paola?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare la somma di 24 e del complemento di 24 a 50 diviso per due.

Analisi del compito

- Comprendere la situazione descritta nell'enunciato: conteggio di perle di due tipi nella ricomposizione di una collana
- Procedura grafica:

  disegnare le 24 perle rosse della collana iniziale e aggiungere ogni volta una perla rossa e una perla gialla contando, dopo ogni aumento, il numero totale delle perle disegnate (conteggio di 1 in 1 o di 2 in 2 a partire da 24 o addizione con addendi 1 o 2) fino ad arrivare a 50 perle.

  Contare le perle rosse aggiunte, sommare questo numero a 24 per trovare il numero di perle rosse della nuova collana

Oppure:

- Procedura numerica:

  aumentare di 2 o contare di 2 in 2 partendo da 24 fino ad arrivare a 50. Contare il numero di volte in cui si aggiunge 2, il che dà il numero delle perle rosse aggiunte (13). Aggiungere poi questo numero a 24 per trovare il numero di perle rosse della nuova collana.

Oppure:

- Procedura aritmetica:

  determinare il complemento di 24 a 50 (26) per avere il numero di perle aggiunte, poi la metà di 26 per avere il numero di perle rosse aggiunte (13). Terminare sommando 13 a 24 per trovare 37.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (37 perle rosse) con presentazione della procedura seguita (disegno con spiegazione della modalità di conteggio delle perle rosse o i calcoli effettuati, per esempio 24 + 13 + 13 = 50 e 24 + 13 = 37 con il loro significato)

3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare o incomplete (per esempio calcolo senza spiegazioni)

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure risposta errata dovuta a un errore di conteggio o di calcolo, ma con una procedura corretta
oppure risposta 13 perle rosse che corrisponde al numero di perle rosse aggiunte, con spiegazioni dettagliate.

1 Inizio corretto di ricerca che mostri la comprensione dei due vincoli: 50 perle in tutto e aggiunte tante perle rosse quante gialle

0 Incomprensione del problema

Livello: 3

Origine: Siena (rivisitazione del problema 6, 11RMT, I prova)

2. COLLEZIONISTI (Cat. 3, 4)

Claudio, Andrea, Giacomo, Dario ed Eugenio collezionano automobiline.

Andrea e Giacomo insieme hanno tante macchinine quante ne ha Claudio.

Dario ha meno macchinine di Giacomo, ma non è lui che ne ha meno di tutti.

Eugenio ha due macchinine in più di Claudio.

Scrivete in ordine i nomi dei bambini cominciando da quello che ha meno macchinine fino a quello che ne ha di più.

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Ordinare cinque numeri che non si conoscono, a partire dalle informazioni date sulla relazione d'ordine di alcuni di essi e dalle relazioni additive che li legano.

Analisi del compito

- Comprendere che si dovranno ordinare i cinque bambini secondo il numero di automobiline che possiedono, in base alle condizioni assegnate.
- Comprendere che le relazioni additive che legano due numeri sono assegnate soltanto per dare informazioni sull'ordine dei numeri stessi. Interpretare la prima condizione comprendendo che, se il numero di automobiline di Claudio è la somma dei numeri delle automobiline di Andrea e Giacomo, questi ultimi due numeri sono minori del primo.
- Scegliere e organizzare le informazioni per dedurne l'ordine in cui i cinque numeri sconosciuti vanno sistemati.

Strategie possibili:

- Fare un'ipotesi sul numero di macchinine che possiede ogni bambino. Per esempio, partendo dalla prima condizione ipotizzare: Andrea 2, Giacomo 4 e Claudio 6. La seconda informazione ci dice che Dario ne ha meno di Giacomo, ma più di Andrea, quindi ne potrebbe avere 3. Dall'ultima informazione dedurre che Eugenio ha più di 6 macchinine (ad esempio potrebbe avere 8 macchinine). A seconda dell'ipotesi iniziale, questa strategia può dar luogo a tentativi lunghi e noiosi.

  Osservazione: con lo stesso tipo di ragionamento, l'ipotesi iniziale potrebbe essere Giacomo 2, Andrea 4 e Claudio 6, ma questo porterebbe a Dario 1, contraddicendo il fatto che non è Dario quello che ne ha meno di tutti.

Oppure:

- Scegliere un'informazione per ordinare due bambini, poi utilizzarne un'altra per cercare di sistemare gli altri bambini in rapporto a quelli già ordinati. Ci si può aiutare con una rappresentazione grafica (per esempio cartellini con i nomi, disegni, linea dei numeri, frecce …) e sistemare i nomi gli uni in rapporto agli altri, man mano che si utilizzano le informazioni date.

Per esempio:

cominciare dalla prima condizione per determinare che Claudio è dopo Andrea e Giacomo (rimangono incerte le posizioni relative di Andrea e di Giacomo);

utilizzare la terza condizione per sistemare Eugenio dopo Claudio (senza effetto sugli altri due che precedono); la seconda condizione permette di togliere l'incertezza su Andrea e Giacomo sistemando Dario dopo Andrea e prima di Giacomo.

- Una volta terminato, controllare che l'ordine trovato per i cinque bambini sia compatibile con tutte le informazioni dell'enunciato.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Andrea, Dario, Giacomo, Claudio, Eugenio) con indicazioni che permettano di comprendere come è stato trovato il posto dei bambini gli uni in rapporto agli altri.

3 Risposta corretta con indicazioni che permettano di comprendere come è stato trovato il posto di almeno un bambino: per esempio il posto di Claudio rispetto ad Andrea e Giacomo o il posto di Dario o quello di Eugenio.
oppure risposta corretta accompagnata da "Abbiamo verificato"

2 Risposta corretta senza alcuna indicazione
oppure risposta con l'ordine invertito e con indicazioni che permettano di capire come è stato trovato il posto dei bambini gli uni in rapporto agli altri.
oppure risposta: Dario, Giacomo, Andrea, Claudio, Eugenio con indicazioni del ragionamento seguito

1 Risposta che tiene conto solo di due delle quattro condizioni
oppure inizio corretto di ragionamento (per esempio deduzione corretta delle informazioni additive).

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4 **Origine: Siena**

3. MATEMATICA IN PALESTRA (Cat. 3, 4)

In palestra Marco esegue un percorso con una palla che fa rimbalzare a terra e che poi lancia in aria.

Marco comincia con quattro rimbalzi della palla a terra seguiti da un lancio in aria. Continua nello stesso modo, quattro rimbalzi e poi un lancio, fino alla fine del percorso.

Luca conta il numero dei rimbalzi e dei lanci di Marco su tutto il percorso: sono in tutto 87.

Quanti rimbalzi a terra ha fatto la palla di Marco?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Gestire la regolarità di due azioni di periodo 5 per determinare il numero delle volte in cui uno dei due eventi si verifica, conoscendo il numero totale delle azioni

Analisi del compito

- Capire che 87 corrisponde ad un alternarsi di rimbalzi al suolo e di lanci in aria e che si tratta di suddividere queste 87 azioni in rimbalzi e lanci.
- Fare un disegno o uno schema completo dei rimbalzi e dei lanci e contare i rimbalzi.

Oppure:

- Determinare la lunghezza di una successione (5 azioni corrispondenti a 4 rimbalzi e un lancio) e cercare il numero delle successioni di 5 azioni contenute in 87, sia per conteggio di 5 in 5 che per tentativi moltiplicativi o moltiplicazioni per completamento. Interpretare il conteggio o i calcoli effettuati per determinare il numero di successioni (17) e il numero di azioni (85). Calcolare il numero di rimbalzi contenuti nelle 17 sequenze ($17 \times 4 = 68$) e capire che le due azioni mancanti per arrivare ad 87 sono due rimbalzi che portano ad un totale di 70 rimbalzi.

  Seguendo questa strategia numerica, gli allievi possono fare degli errori di conteggio e di interpretazione. Possono anche dimenticare il complemento a 87 o non saperlo interpretare.

Oppure:

- Combinare le due strategie: cominciare con procedura grafica o con uno schema, rendersi conto delle successioni di 5 azioni e in seguito intraprendere una procedura numerica. Il ricorso iniziale al disegno può aiutare nell'interpretazione dei calcoli.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (70 rimbalzi) con spiegazioni chiare (un disegno completo che permetta di differenziare rimbalzi e lanci, oppure un disegno incompleto ma accompagnato da una spiegazione che lo completi, oppure calcoli con relativa spiegazione)

3 Risposta corretta senza spiegazioni o con una spiegazione molto incompleta (solo disegno incompleto o qualche calcolo) oppure risposta errata (68) con dimenticanza dei due ultimi rimbalzi, ma spiegazioni chiare

2 Risposta errata (17) corrispondente al numero delle sequenze, con disegni o calcoli o dovuta allo scambio del numero dei rimbalzi con quello dei lanci
oppure risposta errata causata da errori di calcolo, ma disegno o spiegazione che attestino un ragionamento corretto

1 Inizio di ricerca corretta (disegno non finito o calcoli non completi) attestante la comprensione dell'esistenza di una sequenza regolare di 4 rimbalzi e 1 lancio

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

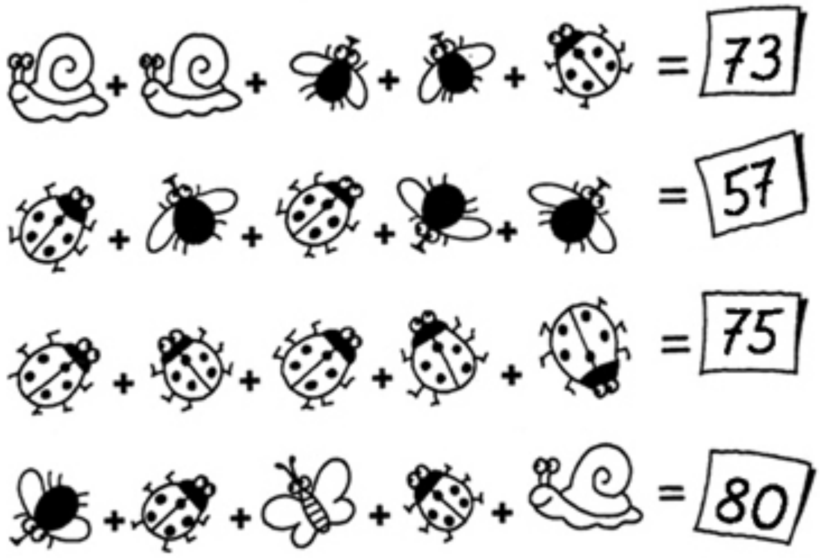
Origine: Siena

4. CERCATE LA BESTIOLINA (Cat. 3, 4, 5)

Ecco qui sotto delle addizioni molto strane.

I numeri sono stati sostituiti da delle bestioline: chiocciole, mosche, coccinelle e una farfalla.

Ogni bestiolina sostituisce sempre lo stesso numero.



Trovate a quale numero corrisponde ogni bestiolina.

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare quattro numeri che compaiono in quattro somme assegnate di cinque addendi ciascuna.

Analisi del compito

- Capire che ciascuna bestiolina disegnata rappresenta uno stesso numero.
- Procedere per deduzione:
- Osservare i disegni e comprendere che occorre cominciare dalla terza riga in cui compaiono solo cinque coccinelle e dedurre il numero corrispondente a una coccinella: 75: 5 = 15 o 5 ×15 =75;
- Proseguire con la seconda riga, riscriverla sostituendo le due coccinelle con il loro valore (15 +15 o 15 × 2 = 30) e dedurre che 3 mosche valgono 27 (57 – 30 = 27) e che quindi una mosca corrisponde a 9 (27 : 3 = 9 o 3 × 9 = 27);
- Proseguire con la prima riga, riscriverla sostituendo sia le coccinelle che le mosche con il loro valore (9+ 9 +15 o 2 × 9 + 15 = 33; dedurre così il valore di due chiocciole (73 – 33 = 40) e il valore di una sola, 20 (40 : 2 = 20 o 2 ×20 = 40)
- Terminare con la quarta riga, riscriverla sostituendo la mosca, le due coccinelle e la chiocciola con il loro valore (9 + (2 x 15) + 20 = 59) e dedurre che il numero corrispondente alla farfalla è 21 (80 – 59 = 21).

Oppure:

- Procedere per tentativi non organizzati e attribuire un numero a ciascuna bestiolina, poi verificare se i numeri scelti rendono vere le quattro uguaglianze (procedura che ha poche possibilità di riuscita).

Oppure:

- Utilizzare una procedura mista fatta di deduzioni parziali e tentativi, per esempio cominciare a scegliere il numero corrispondente alla coccinella a partire dalla terza uguaglianza …

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Coccinella: 15, mosca: 9, chiocciola: 20, farfalla: 21) con descrizione chiara del procedimento seguito (esplicitazione dell'ordine delle fasi del ragionamento e dei calcoli o dei tentativi)

3 Risposta corretta con descrizione poco chiara o con la sola verifica
oppure procedura corretta e ben spiegata, ma risposta errata in seguito ad un solo errore di calcolo

2 Risposta corretta senza descrizione del procedimento
Oppure due o tre numeri corretti con descrizione poco chiara

1 Corretto solo il numero corrispondente alla coccinella con indicazioni sulla procedura usata

oppure inizio di ragionamento corretto, (per esempio, tentativi che mettono in evidenza che viene attribuito ad ogni bestiolina lo stesso valore in due uguaglianze diverse)

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5

Origine: Bourg en Bresse

5. IL PASTICCIERE (Cat. 3, 4, 5)

Un pasticciere ha preparato cinque torte per cinque sue clienti: Anna, Bice, Carla, Dany e Elisa.

Ecco le cinque torte:

- una torta alle mele con la crema
- una torta alle fragole con la crema
- una torta alle mele senza crema
- una torta alle fragole senza crema
- una torta al cioccolato.

Purtroppo, il pasticciere non si ricorda più quello che ha ordinato ogni cliente. Si ricorda però che:

- Anna compera solamente delle torte con la frutta;
- Carla e Dany vogliono sempre delle torte con le fragole;
- Ad Elisa e Carla non piacciono né le torte con la crema, né le torte al cioccolato.

Trovate quale torta ha ordinato ogni cliente.

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Mettere in relazione univoca 5 oggetti e 5 persone, a partire da indicazioni assegnate mediante affermazioni o negazioni.

Analisi del compito

- Capire che le informazioni date permettono o impediscono certe associazioni.
- Procedere per deduzioni, per esempio:
  Anna può avere ordinato tutte le torte tranne quella al cioccolato;
  Carla e Dany possono avere ordinato solo le torte con le fragole, ciò che fa sì che le altre clienti devono avere ordinato altre torte.
  Carla può avere ordinato solo la torta senza crema con le fragole; dunque, Dany avrà ordinato la torta con la crema e con le fragole.
  La torta di Elisa può essere soltanto quella senza crema con le mele, essendo già stata attribuita a Dany la torta senza crema con le fragole.
  Per Anna resta soltanto la torta con la crema e con le mele.
  Per Bice resta allora la torta al cioccolato (questa torta d'altronde avrebbe potuto esserle attribuita fin dall'inizio tenuto conto delle informazioni sulle altre clienti).

Oppure:

- procedere per tentativi e deduzioni, attribuendo una o più torte a una delle clienti e verificando la compatibilità con le informazioni date.

Nota bene: una soluzione che utilizzi una tabella è ipotizzabile, ma poco probabile a questo livello di scolarità.

Attribuzione dei punteggi

4 Soluzione corretta (Anna: crema e mele; Bice: cioccolato; Carla: senza crema e con fragole; Dany: crema e fragole; Elisa: senza crema e con mele), con procedimento chiaro (sequenza di deduzioni, organizzazione con liste o tabelle) o verifica dell'adeguatezza tra la risposta e i vincoli dell'enunciato.

3 Soluzione corretta, ma con spiegazioni o verifiche incomplete o imprecise (per esempio è esplicitata soltanto qualche deduzione)

2 Soluzione corretta senza spiegazione o verifica
Oppure tre o quattro associazioni corrette, con giustificazioni pertinenti

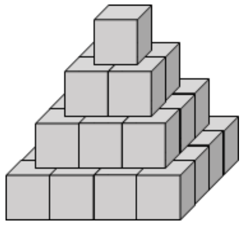
1 Due associazioni corrette, con o senza giustificazioni

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5 **Origine: Siena da 13.I.3** ***Consegnate le ordinazioni***

6. **PIRAMIDI** (Cat. 4, 5)

Alessandro possiede un gran numero di cubi grigi con i quali costruisce delle torri a forma di piramidi, come quella che vedete nella figura.



Le regole di costruzione che utilizza sono le seguenti:

- l'ultimo piano della torre è formato da un solo cubo;
- ogni piano a base quadrata è completo, senza spazi vuoti fra i cubetti.

Oggi Alessandro ha usato 204 cubi grigi per costruire la sua torre.

Quanti piani ha la sua torre?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare i quadrati dei primi otto numeri naturali e farne la somma per ottenere 204.

Analisi del compito

- Leggere correttamente l'immagine. Capire che per alcuni cubi si vedono tre facce, per altri due e per altri ancora una e inoltre che ci sono dei cubi di cui non se ne vede neppure una. Capire che ogni piano è formato (ad eccezione dell'ultimo) da cubi messi uno vicino all'altro in modo da formare un parallelepipedo a base quadrata. Capire che, su ogni lato di questi quadrati, i cubi aumentano di uno passando da un piano a quello immediatamente sottostante.
- Capire che per trovare il numero di cubi utilizzati per ogni piano bisogna moltiplicare il numero di cubi di un lato per se stesso.
- Per trovare il numero dei piani della piramide procedere per tentativi: per esempio iniziare con una base di 6×6 cubi. Addizionare allora 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91 e accorgersi che i cubi utilizzati sono troppo pochi; aggiungere un piano 7×7 = 49. Rendersi conto che non è ancora sufficiente e aggiungere quindi 8 × 8 = 64 e constatare che i cubi utilizzati sono così 204. Concludere che la torre ha 8 piani.

Oppure, togliere progressivamente da 204 i vari piani cominciando da quello di un quadretto fino ad arrivare all'ottavo piano e scoprire che con 8 piani si sono utilizzati tutti i cubi. 204 – 1 = 203; 203 – 4 = 199; 199 – 9 = 190 … 113 – 49 = 64; 64 – 64 = 0

Oppure, comprendere come calcolare il numero di cubi in ciascun piano, procedere partendo dall'alto verso il basso e addizionare fino a raggiungere il totale di 204 cubi:

1 + 4 = 5; 5 + 9 = 14; 14 + 16 = 30; 30 + 25 = 55; 55 + 36 = 91; 91 + 49 = 140; 140 + 64 = 204.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (8 piani) con descrizione chiara delle tappe seguite (anche solo i calcoli).

3 Risposta corretta con descrizione poco chiara o incompleta, per esempio mancano alcuni calcoli ma è chiara la procedura seguita.
oppure risposta errata dovuta ad un solo errore di calcolo, ma con la procedura descritta nei dettagli.

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta errata dovuta a due errori di calcolo, con indicazioni sulla procedura utilizzata.

1 Inizio di ricerca coerente, per esempio si sono calcolati i cubetti utilizzati per i primi piani, ma non si è conclusa la ricerca

0 Incomprensione del problema

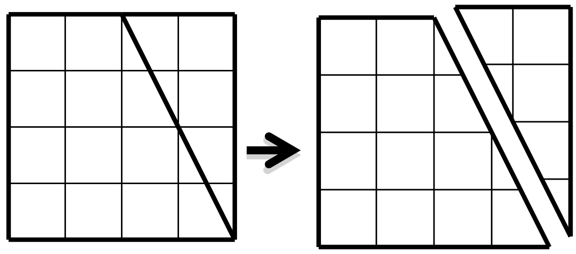
Livello: 4, 5

Origine: Siena

7. IL QUADRATO CAMBIA FORMA! (Cat. 4, 5)

Carletto ha tracciato un segmento all'interno di un quadrato di quattro quadretti di lato e ha tagliato il quadrato lungo questo segmento.

Carletto cerca poi di costruire altre figure mettendo insieme i due pezzi ottenuti seguendo questa regola: i due pezzi devono essere uniti facendo coincidere due lati della stessa lunghezza.



Ecco due delle figure che si possono ottenere.

Per costruire la figura B, il pezzo triangolare è stato ribaltato.

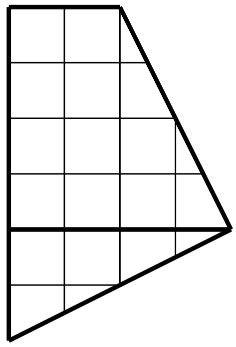


Figura A

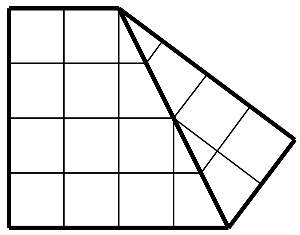


Figura B

Ecco due esempi di figure che non vanno bene.

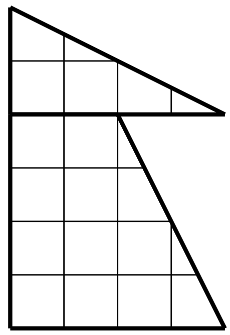


Figura C

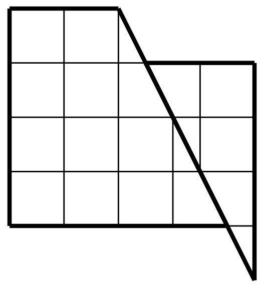
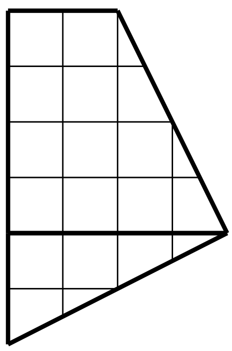
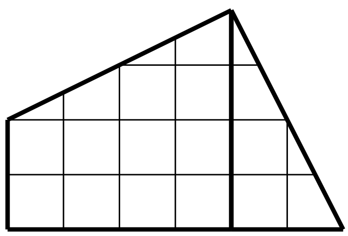


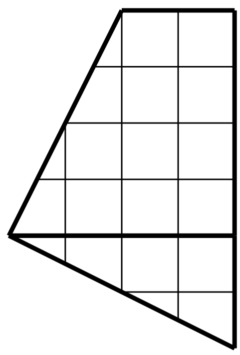
Figura D

Ecco un esempio di una stessa figura messa in tre posizioni diverse.





La figura è stata ruotata



La figura è stata ribaltata

Una figura è diversa da un'altra se non si riesce a sovrapporla esattamente all'altra ruotandola o ribaltandola.

Cercate tutte le figure diverse, oltre al quadrato e alle figure A e B, che si possono ottenere unendo i due pezzi e rispettando la regola di costruzione.

Incollate o disegnate le figure che avete ottenuto, oltre alle figure A e B.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

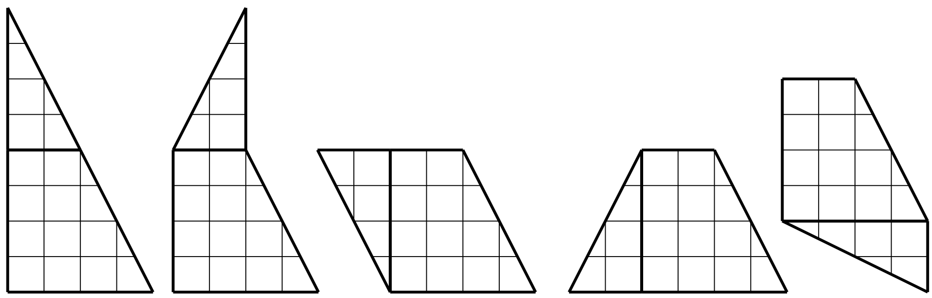
Trovare tutti i poligoni che è possibile ottenere unendo, lungo i lati della stessa lunghezza, i due poligoni ottenuti a partire da una divisione di un quadrato in due parti.

Analisi del compito

- Capire i vincoli (poligoni ottenuti facendo coincidere due lati della stessa lunghezza).
- Sapere riconoscere una stessa figura in orientazioni diverse o ribaltata.

Strategie possibili

- Tentativi non organizzati di unione dei due pezzi. La difficoltà consiste allora nel differenziare una nuova figura da una figura già costruita e nel trovarle tutte.
- Ricerca organizzata:
  Individuare su ognuno dei due pezzi i lati che si possono fare coincidere:
  l'ipotenusa del triangolo può essere attaccata al trapezio solo lungo il suo lato obliquo;
  il cateto minore del triangolo rettangolo può essere unito al trapezio solo lungo la base minore;
  il cateto maggiore del triangolo rettangolo può essere unito al trapezio lungo due dei suoi lati (altezza e base maggiore).
  Per ogni coppia di lati che possono coincidere, realizzare un poligono unendo i due pezzi che mostrano la stessa faccia e un altro che si ottiene ribaltando uno dei due pezzi.
  Eliminare dalle figure costruite le figure A e B.
- Le cinque soluzioni, oltre alle figure A e B sono:



Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (le cinque figure senza ripetizioni, né figure errate)
oppure le 5 figure corrette (senza ripetizioni, né figure errate) con in più una delle due figure A e B o tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)

3 Le 5 figure corrette (senza figure errate) con al massimo due ripetizioni ed eventualmente con in più una delle due figure A e B o tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)
oppure 4 figure corrette (senza ripetizioni, né figure errate) eventualmente con in più una delle due figure A e B o tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)

2 4 figure corrette senza figure errate, con al massimo due ripetizioni ed eventualmente una delle due figure A e B o tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)
oppure 3 figure corrette (senza ripetizioni, né figure errate) eventualmente con in più una delle due figure A e B oppure tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)

1 2 figure corrette (senza ripetizioni, né figure errate) eventualmente con in più una delle due figure A e B oppure tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)
oppure almeno 2 figure corrette senza figure errate ma con ripetizioni, eventualmente con in più una delle due figure A e B o tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)
oppure almeno 2 figure corrette e una o due figure errate eventualmente con in più una delle due figure A e B o tutte e due (ed eventualmente anche il quadrato)

0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5

Origine: Siena

8. **FIAMMIFERI** (Cat. 5, 6)

Eliott ha quattro cartoncini quadrati tutti uguali e una scatola di fiammiferi.

Colora il primo di grigio (figura A) e incolla 16 fiammiferi lungo i lati, senza tagliarne o sovrapporne neanche uno. I 16 fiammiferi ricoprono perfettamente il contorno del cartoncino.

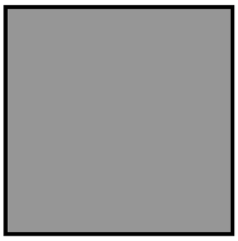


Figura A

Poi, all'interno degli altri quadrati, Elliot disegna le tre figure grigie che vedete qui sotto. Egli sceglie le lunghezze dei lati delle figure grigie in modo da poter incollare dei fiammiferi tutto intorno ad ogni figura senza tagliarne né sovrapporne neanche uno.

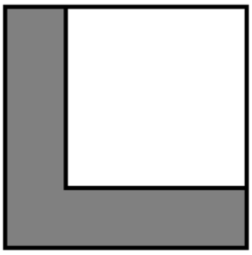


Figura B

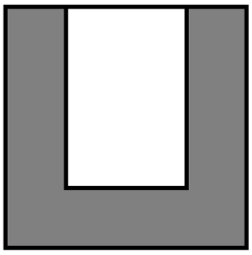


Figura C

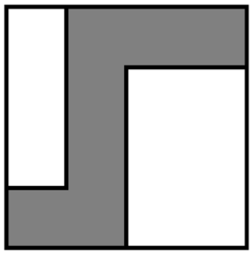


Figura D

Di quanti fiammiferi Elliot ha ancora bisogno?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare la somma dei perimetri di tre poligoni disegnati all'interno di quadrati identici e i cui lati sono paralleli ai lati dei quadrati, dopo aver identificato una opportuna unità di misura.

Analisi del compito

- Capire, dai dati relativi al primo quadrato, che su ciascuno dei suoi lati si possono incollare 4 fiammiferi (16 : 4) e stimare, ad occhio o ricorrendo a misure, che in ognuno dei poligoni disegnati negli altri quadrati il lato più corto corrisponde ad un fiammifero
- Riportare questa unità di misura sugli altri lati dei poligoni e trovarne il perimetro
  - 16 per la figura B: 4, 4, 3, 3, 1, 1
  - 22 per la figura C: 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1
  - 16 per la figura D: 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1

  Addizionare i perimetri (in fiammiferi) delle figure 16 + 22 + 16 = 54

Oppure:

- Per le figure B e D vedere, per traslazione o rotazione, che i lati, interni al quadrato corrispondono ai segmenti dei lati dei quadrati non compresi dal disegno e che dunque misurano 16.

  Per la figura C, capire che il lato orizzontale, interno al quadrato, corrisponde al segmento del lato orizzontale in alto non compreso nella figura e che vi sono, inoltre, ancora due segmenti da considerare, interni alla figura, ognuno di lunghezza 3. Dedurre il perimetro della figura (16+6= 22).

  Addizionare i perimetri (in fiammiferi) delle figure 16 + 22 + 16 = 54

Oppure:

Misurare con la riga graduata i lati o il perimetro della figura A e poi delle altre figure e utilizzare la proporzionalità tra misure in centimetri e il numero di fiammiferi per dedurre la risposta (Questa procedura più complessa è soggetta alle imprecisioni delle figure e delle misurazioni)

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (54 fiammiferi o 54) con spiegazione chiara e completa (calcoli, deduzioni, disegni con le indicazioni sul numero dei fiammiferi su ciascun segmento dei perimetri …).

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara, ma con indicatori del procedimento utilizzato (riporto di lunghezze, utilizzo della riga, confronto di segmenti, …)

2 Risposta errata con strategia corretta, con un errore di calcolo o errore nel conteggio dei fiammiferi o nelle misure
oppure risposta corretta senza spiegazione
oppure trovati due perimetri con spiegazioni chiare

1 Inizio di procedimento corretto (comprensione del fatto che ogni lato della figura A misura 4 fiammiferi, misura dei perimetri di almeno due figure senza spiegazioni …)
oppure determinato un perimetro con spiegazioni
oppure utilizzo di altre unità di misura (cm o mm) che permetta di determinare che ci sono due figure isoperimetriche al quadrato, un'altra con il perimetro più grande, ma senza indicare quanti sono i fiammiferi necessari
oppure ricerca corretta del perimetro (in fiammiferi) delle parti bianche invece di quello delle parti grigie

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6

Origine: Bourg en Bresse

9. OTTO TRIANGOLI E UN QUADRATO (Cat. 5, 6)

La figura 1 mostra un quadrato suddiviso in otto triangoli uguali fra loro.

La figura 2 è diversa dalla figura 1, perché mostra lo stesso quadrato, ma suddiviso in modo diverso in otto triangoli uguali fra loro.

Le figure 2 e 3 sono uguali, perché le linee delle suddivisioni coincidono se si sovrappongono i due quadrati in modo opportuno.

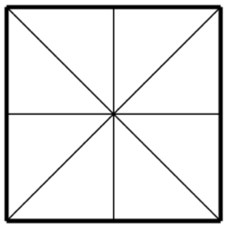


figura 1

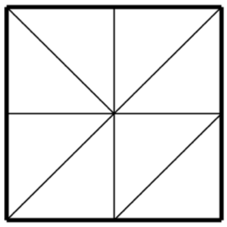


figura 2

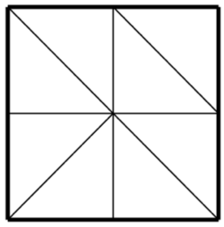


figura 3

Quante sono le figure diverse (cioè che non si possono sovrapporre esattamente) che mostrano la suddivisione del quadrato in otto triangoli uguali fra loro?

Disegnatele qui sotto.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tutte le suddivisioni di un quadrato in otto triangoli rettangoli isosceli uguali fra loro.

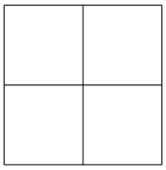
Analisi del compito

- Verificare che le figure 2 e 3 sono suddivise allo stesso modo perché si può passare dall'una all'altra mediante una rotazione di un quarto di giro e che le figure 1 e 2 sono evidentemente diverse.

- Procedere con i primi tentativi effettuando suddivisioni mediante disegni su carta, quadrettata o no, (eventualmente mediante ritaglio e assemblaggio dei piccoli triangoli, …), individuando quelle diverse tra loro.
- Per un inventario sistematico, si può notare che i triangoli devono avere i loro cateti sui lati o sugli assi del quadrato.

  Basta quindi partire dal quadrato d'origine e trovare le nuove quattro suddivisioni 4, 5, 6, 7.

  Oppure si può notare che le ipotenuse dei triangoli sono le diagonali dei quattro piccoli quadrati. Si possono allora cercare tutte le diverse suddivisioni che si ottengono tracciando una diagonale in ognuno dei piccoli quadrati. Si possono così distinguere i casi in cui le quattro diagonali hanno tutte un estremo nel centro del quadrato grande o solo tre di esse o solo due o una o nessuna.


origine

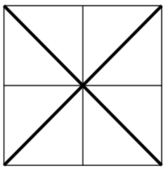


figura 1

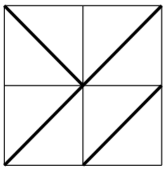


figura 2 o 3

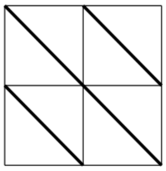


figura 4

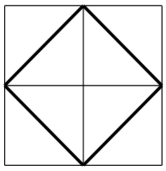


figura 5

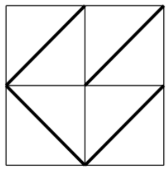


figura 6

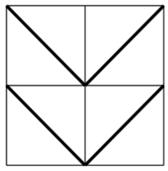


figura 7

Attribuzione dei punteggi

4 Quattro nuove suddivisioni corrette (4, 5, 6, 7) con disegno o ritaglio
oppure tutte e sei le suddivisioni

3 Tre nuove suddivisioni corrette (tra 4, 5, 6, 7): una sola mancante, senza ripetizioni
oppure cinque delle sei suddivisioni: una sola mancante, senza ripetizioni

2 Due nuove suddivisioni corrette (tra 4, 5, 6, 7): due mancanti, senza ripetizioni
oppure tre nuove suddivisioni tra cui una ripetizione

1 Due nuove suddivisioni tra cui una ripetizione
oppure une sola nuova suddivisione corretta

0 Incomprensione del problema (nessuna suddivisione corretta)

Livello: 5, 6

Origine: Rozzano e fj

10. I CIOCCOLATINI DI ZOE (Cat. 5, 6, 7)

Zoe ha trenta cioccolatini e desidera metterli tutti dentro dei sacchetti in modo che in ogni sacchetto ci sia lo stesso numero di cioccolatini.

Zoe comincia a fare 5 sacchetti con 6 cioccolatini ciascuno, poi pensa:

"Avrei potuto anche fare 6 sacchetti da 5 cioccolatini o 2 sacchetti da 15 cioccolatini o 15 sacchetti da 2 cioccolatini o 3 sacchetti da 10 cioccolatini o 10 sacchetti da 3 cioccolatini o un solo sacchetto da 30 cioccolatini o ancora 30 sacchetti con un solo cioccolatino ciascuno.

Ho quindi otto modi diversi di fare i sacchetti."

Zoe mangia un cioccolatino e così gliene rimangono 29: *«Accipicchia, dice tra sé, ora ho solo due modi per fare i sacchetti: 1 sacchetto da 29 cioccolatini o 29 sacchetti con un solo cioccolatino»*

Zoe ne mangia un altro e poi un altro ancora… . Zoe decide di non mangiarne più quando, con i cioccolatini che le rimangono, può fare dei sacchetti in cinque modi diversi e solo in cinque modi.

Quanti cioccolatini ha mangiato Zoe?

Spiegate come avete trovato la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare il più grande numero minore di 30 che può essere scomposto esattamente in cinque modi diversi nel prodotto di due numeri naturali e calcolare il complemento a 30 di tale numero.

Analisi del compito

- Verificare, per esempio, che ci sono 8 ripartizioni possibili per 30 cioccolatini, 2 ripartizioni per 29, e comprendere che occorre continuare a cercare quante ripartizioni ci sono per 28 cioccolatini, poi per 27, … finché si trova un numero di cioccolatini che permette esattamente 5 ripartizioni diverse.
- Capire che ogni volta che Zoe mangia un cioccolatino occorre ricominciare, con quelli che restano, la ricerca di una ripartizione in sacchetti contenenti lo stesso numero di cioccolatini.
- Trovare che, con 28 cioccolatini ci sono sei ripartizioni possibili: (1 × 28, 2 × 14, 4 × 7, 7 × 4, 14 × 2, 28 × 1)
- Continuare allo stesso modo con 27 (quattro ripartizioni: 1 × 27, 3 × 9, 9 × 3, 27 × 1) ; con 26 (quattro ripartizioni: 1 × 26, 2 × 13, 13 × 2, 26 × 1) ; 25 (tre ripartizioni: 1 × 25, 5 × 5, 25 × 1) ; 24 (otto ripartizioni: 1 × 24, 2 × 12, 3 × 8, 4 × 6, …) ; con 23 (due ripartizioni: 1 × 23,…); con 22 (quattro ripartizioni: 1 × 22, 2 × 11, …) ; con 21 (quattro ripartizioni: 1 × 21, 3 × 7, …) ; con 20 (sei ripartizioni: 1 × 20, 2 × 10, 4 × 5 …); con 19 (due ripartizioni: 1 × 19,…), 18 (sei ripartizioni: 1 × 18, 2 × 9, 3 × 6 …); con 17 (due ripartizioni: 1 × 17,…), con 16 (cinque ripartizioni: 1 × 16, 2 × 8, 4 × 4 ; 8 × 2, 16 × 1).
- Constatare che 16 è il più grande numero minore di 30 che può essere scomposto esattamente in cinque modi diversi :
- Calcolare infine che Zoe ha mangiato 14 cioccolatini: 30 – 16 = 14.

Oppure:

- Fare dei tentativi non sistematici con numeri che, a stima, potrebbero soddisfare la condizione.

Nota: in una procedura o nell'altra, gli alunni possono, dopo numerosi tentativi, constatare che tutti i numeri sono scomponibili in due prodotti dove i fattori sono 1 e il numero stesso e quindi restringere la loro ricerca a numeri che possono essere scomposti in altri tre prodotti oltre a questi due

Oppure: Sempre dopo numerosi tentativi, gli allievi possono constatare che ogni volta che scompongono il numero nel prodotto di due fattori differenti, c'è un secondo prodotto con gli stessi fattori e dunque dedurre che affinché il numero di prodotti sia dispari, è necessario che il numero sia scomponibile nel prodotto di un numero per se stesso (cioè che il numero sia un quadrato).

Nota: non è prevedibile per le categorie a cui il problema è proposto, una procedura risolutiva che si appoggi su una tecnica atta a fornire il numero di divisori di un intero n, per n minore di 30.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (14 cioccolatini) con spiegazioni chiare e complete (determinazione del numero di ripartizioni almeno per gli interi da 26 a 16 e calcolo del numero di cioccolati mangiati o traccia scritta che mostri la scomposizione di tutti i

numeri dal più grande al più piccolo fino a trovare 16 o spiegazione delle proprietà del numero cercato in modo da ridurre i tentativi)

3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare o incomplete (per esempio solo la determinazione delle ripartizioni per 16 cioccolatini)
oppure risposta 16 (numero dei cioccolatini da ripartire), con procedura corretta ed esplicitata, ma dimenticanza del calcolo dei cioccolatini mangiati

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta 16 cioccolatini (solo con verifica che il numero 16 è quello che soddisfa la condizione)

1 Inizio di ricerca corretta: almeno tre numeri oltre 30 e 29, per i quali siano state trovate tutte le scomposizioni in prodotti di due fattori.

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Bourg en Bresse

11. DATE PARTICOLARI (Cat. 6, 7)

Eugenia è in viaggio in autostrada con i suoi genitori e nota su un pannello la data 14/02/2016. Riflette un po' e dice: «*Che curiosità, la somma di 14 e 2 è proprio 16!*».

La mamma le risponde:

«*Anche quando è nata la nonna, il 27/11/1938, si è verificata la stessa coincidenza: 27 + 11 = 38. Si tratta veramente di "date particolari"!*».

Durante l'anno 1938, oltre la data di nascita della nonna di Eugenia, ci sono state altre "date particolari".

Elencatele tutte le date particolari dell'anno 1938, oltre la data di nascita della nonna di Eugenia.

Mostrate come avete fatto a trovare le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Scomporre un numero nella somma di due numeri naturali, ciascuno dei quali compreso in un intervallo assegnato.

Analisi del compito

- Capire la situazione problematica: si sommano i numeri che indicano rispettivamente il giorno all'interno di un mese ed il mese all'interno di un anno e tale somma deve essere uguale alle ultime due cifre dell'anno 1938.
- Notare che il primo addendo deve essere minore o uguale a 31 ed il secondo minore o uguale a 12
- Impostare una ricerca ordinata di tutte le "date particolari" che si sono verificate nel 1938. Ad esempio, partire dal numero massimo possibile per il mese, dicembre, e poi andare a ritroso; elencare quindi le date particolari del 1938:

  26/12/1938 27/11/1938 28/10/1938 29/09/1938 30/08/1938 31/07/1938

Attribuzione dei punteggi

4 Elenco corretto e completo (26/12/1938; 28/10/1938; 29/09/1938; 30/08/1938; 31/07/1938) con descrizione chiara del ragionamento (eventualmente anche ripetizione della data 27/11/1938)

3 Elenco corretto e completo, con descrizione poco chiara o incompleta del ragionamento
oppure elenco con dimenticanza di una sola data con descrizione chiara del ragionamento

2 Dimenticanza di 2 o 3 date particolari con descrizione chiara del ragionamento
oppure elenco corretto e completo senza spiegazione

1 Elencate solo 1 o 2 date particolari con o senza descrizione del ragionamento

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7

Origine: Siena

12. COLLEZIONE DI CARTOLINE (Cat. 6, 7, 8)

Rita e Roberta collezionano cartoline. Rita ne ha 200 e chiede a Roberta quante cartoline possiede.

Roberta le risponde:

- ne ho meno di 200,
- se le prendo due a due, oppure tre a tre oppure sette a sette, ne avanza sempre una,
- se le prendo cinque a cinque, non ne avanza nessuna.

Qual è il numero delle cartoline collezionate da Roberta?

Spiegate come avete trovato la soluzione.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Cercare tutti i numeri minori di 200 che siano divisibili per 5 e tali che i resti delle divisioni per 2, per 3 e per 7 siano uguali a 1

Analisi del compito

- Comprendere che il numero è minore di 200
- Capire dall'ultima frase che il numero è un multiplo di cinque: elencarli tutti fino a 195; eliminare il 5 perché non si può formare un gruppo di 7 cartoline; eliminare tutti i multipli di 2 (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190); eliminare tutti i multipli di 3 (15, 45, 75, 105, 135, 165, 195); eliminare tutti i multipli di 7 (35, 175).
- Rimangono: 25 – 55 – 65 – 85– 95 – 115 – 125 – 145 – 155 – 185. Tra questi l'unico che rispetta tutte le condizioni è 85. Tale procedura può essere seguita anche partendo da 200.

Oppure:

- Secondo la seconda condizione, determinare il minimo comune multiplo di 2, 3, 7 cioè 42. Poi aggiungere 1 a 42 e a tutti i suoi multipli minori di 200 per ottenere le possibili cartoline di Roberta: $42+1 = 43$; $(42 \times 2) +1 = 85$; $(42 \times 3) + 1 = 127$; $(42 \times 4) + 1 = 169$
- Verificare che solo 85 rispecchia la terza condizione.

Oppure:

- Confrontare i multipli comuni di 2, 3, 7: (42, 84, 126, 168) con i multipli di 5 immediatamente successivi (45, 85, 130, 170).
- Verificare che solo 85 rispecchia la seconda condizione: i resti delle divisioni per 2, per 3, per7 sono uguali a 1.

Oppure:

- Comprendere che il numero è multiplo di 5 e che termina con 5, poiché non è multiplo di 2.
- Comprendere che occorre individuare un multiplo di 7, di 3 e di 2 che abbia 4 alle unità, a cui andrà aggiunto 1.
- Scoprire che solo 84 risponde a queste caratteristiche e concludere che le cartoline di Roberta sono 85.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (85) con i dettagli della procedura (per esempio: lista dei multipli di 2 aumentati di 1 e/o dei multipli di 3 aumentati di 1 e/o dei multipli di 7 aumentati di 1 o ancora di 42 aumentati di 1… con indicazioni che specifichino che 85 è l'unico adatto oppure lista di tutti i multipli di 5 con la spiegazione del perché si sceglie 85).

3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare (liste molto incomplete oppure liste complete e corrette ma in cui non si capisce perché alcuni numeri sono stati eliminati).

2 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure liste corrette, ma risposta sbagliata per errata scelta dei numeri.

1 Inizio di ragionamento corretto con liste incomplete dei multipli
oppure risposta: 85 e un numero errato.

0 Incomprensione del problema.

Livello: 6, 7, 8

Origine: Puglia

13. PIRAMIDI BICOLORI (Cat. 6, 7, 8, 9)

Alessandro possiede un gran numero di cubetti bianchi e un gran numero di cubetti grigi. Li utilizza per costruire delle torri a forma di piramide, come quelle che vedete in questi due disegni.

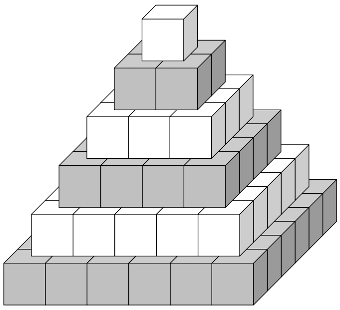


figura 1

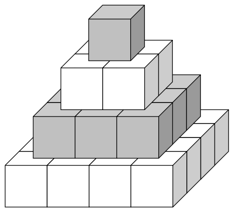


figura 2

Le regole di costruzione che usa sono le seguenti:

- ogni piano a base quadrata è completo, senza spazi vuoti fra i cubetti ed è formato da cubetti di un solo colore;
- due piani che si toccano sono di colore diverso;
- il piano iniziale e l'ultimo sono di colore diverso;
- la torre termina con un solo cubetto.

Oggi Alessandro ha costruito una bella torre e ha usato 165 cubetti grigi.

Quanti cubetti bianchi ha utilizzato?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

In un contesto di costruzioni piramidali mediante cubetti, addizionare i quadrati dei primi numeri dispari e dei primi numeri pari sapendo che una delle due somme è uguale a 165.

Analisi del compito

- Capire, dagli esempi dati e dalle regole descritte, il modo di procedere nella costruzione delle torri.
- Capire che i numeri di cubetti utilizzati per i differenti piani costituiscono la sequenza dei quadrati dei primi numeri naturali 1, 4, 9, 16, …
- Se il cubetto in alto è grigio si devono fare le somme successive dei quadrati dei primi due, poi dei primi tre, poi dei primi quattro numeri dispari… fino ad ottenere 165: 1+ 9; 1+ 9 + 25; 1+ 9 + …= 165; rendersi conto che l'ultimo quadrato da aggiungere è 81 che corrisponde al 9° piano a partire dall'alto verso il basso.
- Se il primo cubetto fosse bianco per i grigi bisognerebbe addizionare il 2°, 4°, 6° … termine della successione, termini che sono tutti pari e la cui somma non può quindi essere 165.
- Siccome la torre ha almeno 9 piani e si è iniziato con un piano grigio, in totale avrà 10 piani, perché il primo e l'ultimo devono essere di colore diverso.
- Sommare poi i quadrati dei numeri pari da 2 a 10: 4 + 16; 4 + 16 + 36; 4 + 16 + …. = 220.
- Concludere che nella piramide vi sono 220 cubetti bianchi.

Oppure

- Capire subito che il cubetto in alto deve essere grigio in quanto 165 è un numero dispari e non può essere ottenuto come somma di quadrati di numeri pari.
- Procedere quindi sommando i quadrati dei numeri dispari per determinare l'altezza della piramide.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (220 cubetti bianchi) ben spiegata (disegni, calcoli, …) con la motivazione dell'esclusione dell'altro tipo di torre con il primo cubetto bianco

3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete o poco chiare

2 Risposta corretta senza spiegazioni

Oppure procedimento corretto, ma con risposta errata dovuta a un solo errore nel conteggio o nel calcolo

Oppure procedimento corretto ma risposta “120 cubetti bianchi” perché ci si dimentica che il piano di base e quello più alto devono essere di colore diverso e ci si ferma quindi al nono piano della piramide

1 Inizio di ragionamento corretto, per esempio almeno il calcolo dei primi cinque o sei piani

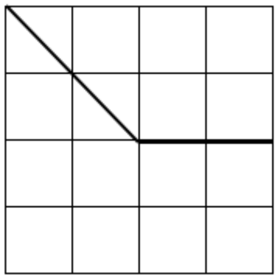
0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8, 9

Origine: Siena

14. IL QUADRATO CAMBIA FORMA! (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Tagliando il quadrato in figura lungo i segmenti indicati si ottengono due pezzi.



Se si muovono i due pezzi, spostandoli o ribaltandoli, e poi si affiancano nuovamente in modo che un lato di un pezzo coincida esattamente con un lato dell'altro, si ottengono altre figure.

Disegnate su un foglio quadrettato tutte le figure diverse fra loro, che riuscite ad ottenere con i due pezzi del quadrato, rispettando le regole di costruzione.

Attenzione: due figure sono diverse fra loro se non sono perfettamente sovrapponibili.

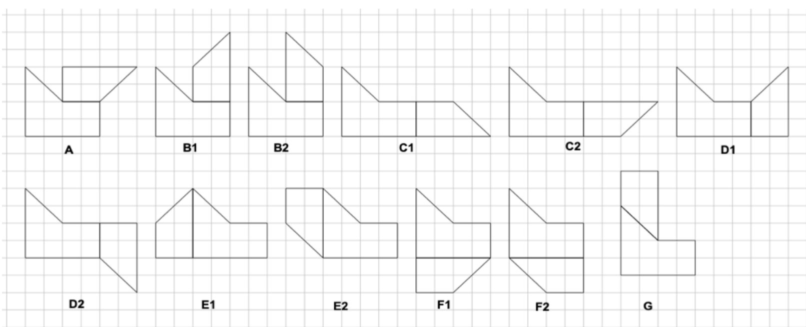
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tutti i poligoni che si possono formare unendo, lungo i lati della stessa lunghezza, due poligoni ottenuti dividendo un quadrato in due parti.

Analisi del compito

- Comprendere che le figure da disegnare sono sempre ottenute dalle stesse due parti del quadrato iniziale, posizionate in modo diverso (è permesso anche ribaltarne una o entrambe) e affiancate in modo da avere un solo lato in comune.
- Analizzare le due parti, trapezio rettangolo e pentagono, in cui è scomposto il quadrato ed individuare relazioni tra i lati delle due figure: la base minore, l'altezza del trapezio e i due lati minori del pentagono sono congruenti; la base maggiore del trapezio e i due lati maggiori del pentagono sono congruenti; il lato obliquo del trapezio e il lato obliquo del pentagono sono congruenti.
- Immaginare di disporre i due pezzi del quadrato secondo le regole indicate e provare a disegnare le figure ottenute su un foglio quadrettato. L'individuazione delle figure può essere facilitata ritagliando un modello del trapezio rettangolo e uno del pentagono e assemblandoli poi in modo che i due modelli abbiano in comune esattamente un lato.
- Procedere in modo non organizzato (in tal caso è probabile che non si trovino tutte le figure), oppure in modo sistematico. Nel secondo caso, considerare, ad esempio, il pezzo a forma di pentagono, scegliere un lato e affiancargli il trapezio rettangolo in modo che coincidano il lato del pentagono e quello, o uno di quelli, della stessa lunghezza nel trapezio. Rendersi conto che, provando a ripetere la stessa operazione dopo aver ribaltato il trapezio rettangolo, solo in alcuni casi si ottiene una seconda figura che non è congruente alla prima (cfr. figure B_1 e B_2; C_1 e C_2; D_1 e D_2; E_1 e E_2; F_1 e F_2) mentre negli altri casi, è impossibile costruire una seconda figura (cfr. figure A, G).
- Un compito piuttosto delicato è quello di controllare che le figure ottenute siano tutte non congruenti tra loro. Un metodo efficace per verificarlo sperimentalmente è, per esempio, quello di usare un foglio di carta sottile, riprodurvi una delle due figure e controllare se tale riproduzione, dopo aver ribaltato il foglio, si sovrappone perfettamente o no all'altra figura. (Per questa via si può arrivare ad osservare che figure congruenti sono sempre ottenute una dall'altra ribaltando entrambi i pezzi che le compongono)
- Concludere che le figure cercate (distinte dal quadrato e non congruenti tra loro) sono le **12** riprodotte qui sotto.



Attribuzione dei punteggi

4 Disegnate solo le 12 figure corrette senza figure doppie o errate (eventualmente con in più il quadrato)

3 Disegnate da 9 a 11 figure corrette senza figure doppie od errate (eventualmente con in più il quadrato)
oppure disegnate le 12 figure corrette con in più al massimo due figure doppie e nessuna errata (eventualmente con in più il quadrato)

2 Disegnate da 9 a 11 figure corrette con in più al massimo due figure doppie e nessuna errata (eventualmente con in più il quadrato)
oppure disegnate le 12 figure corrette con in più al massimo due figure doppie e/o al massimo una errata (eventualmente con in più il quadrato)
oppure disegnate da 6 a 8 figure corrette senza figure doppie o errate (eventualmente con in più il quadrato)

1 Disegnate 4 o 5 figure corrette senza figure doppie o errate (eventualmente con in più il quadrato)
oppure disegnate da 6 a 11 figure corrette con in più al massimo due figure doppie e/o al massimo due errate (eventualmente con in più il quadrato)

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

15. QUADRATI MAGICI MOLTIPLICATIVI (Cat. 7, 8, 9, 10)

Un quadrato magico moltiplicativo è un quadrato in cui i prodotti dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale sono uguali.

I numeri nelle caselle di un quadrato magico devono essere tutti diversi.

Rosanna vuole realizzare un quadrato magico moltiplicativo utilizzando tutte le diverse potenze di 2 con gli esponenti da 0 a 8 e inizia inserendo la quarta potenza di 2 nella casella centrale:

	2^4	

Continua poi inserendo in una diagonale il doppio e la metà del numero che ha messo nella casella centrale.

Aiutate Rosanna a completare in tutti i modi possibili il suo quadrato moltiplicativo con le potenze di 2 con esponenti da 0 a 8 non ancora utilizzati.

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Costruire quadrati magici moltiplicativi in cui è già riempita la casella centrale, utilizzando le potenze di 2 e le loro proprietà, rispettando dei vincoli sugli esponenti e sulle potenze da inserire in una delle diagonali.

Analisi del compito

- Capire che il doppio di 2^4 è 2^5 e che la sua metà è 2^3 e sistemare le potenze su una diagonale.
- Calcolare il prodotto delle potenze di una diagonale mediante la somma degli esponenti (2^{12}).
- Capire che la somma degli esponenti delle potenze che stanno su ogni riga e su ogni colonna deve essere 12. Completare le righe e le colonne di un quadrato magico tenendo conto delle varie possibilità di ottenere 9 (12−3) se si completa una linea in cui compare già la potenza terza di 2 oppure 7 (12−5) se si completa una linea in cui è già stata sistemata la potenza quinta oppure 8 (12−4) se si completa una linea in cui è già stata sistemata la potenza quarta.

Oppure:

- Calcolare 2^4=16, quindi il doppio e la metà, trovare il prodotto costante e completare per tentativi un quadrato e trasformare i numeri ottenuti in potenze di 2.
- Dal quadrato trovato individuare, per simmetria e rotazione altri quadrati e stabilire che ce ne sono 8.

2^3	2^8	2^1
2^2	2^4	2^6
2^7	2^0	2^5

2^5	2^6	2^1
2^0	2^4	2^8
2^7	2^2	2^3

2^1	2^8	2^3
2^6	2^4	2^2
2^5	2^0	2^7

2^1	2^6	2^5
2^8	2^4	2^0
2^3	2^2	2^7

2^3	2^2	2^7
2^8	2^4	2^0
2^1	2^6	2^5

2^7	2^2	2^3
2^0	2^4	2^8
2^5	2^6	2^1

2^5	2^0	2^7
2^6	2^4	2^2
2^1	2^8	2^3

2^7	2^0	2^5
2^2	2^4	2^6
2^3	2^8	2^1

Oppure:

- costruire tutti i quadrati magici additivi 3×3 con i numeri da 0 a 8 e con 4 nella casella centrale. Trasformare poi i quadrati individuati in quadrati moltiplicativi scrivendo i numeri come potenze di due.

Attribuzione dei punteggi

4 Determinati correttamente tutti gli otto quadrati, senza quadrati doppi o errati, con esplicitazione delle proprietà delle potenze e verifica del prodotto costante su ogni linea per almeno un quadrato

3 Determinati correttamente tutti gli otto quadrati senza quadrati doppi o errati, senza nessuna verifica né altre spiegazioni oppure sei o sette quadrati corretti senza quadrati doppi o errati, con qualche verifica (su qualche linea)

2 Cinque o quattro quadrati completati correttamente senza quadrati doppi o errati, con o senza verifica.
oppure almeno sei quadrati corretti, ma con l'aggiunta di al massimo un quadrato doppio e nessun errato con o senza verifica

1 Meno di quattro quadrati completati correttamente senza quadrati doppi o errati
oppure almeno quattro quadrati completati correttamente con l'aggiunta di al massimo due quadrati errati e/o al massimo due doppi

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Aosta

16. TRIANGOLI SCONOSCIUTI (Cat 7, 8, 9, 10)

Il professore di matematica ha chiesto ai suoi allievi, come compito a casa, di trovare tutti i triangoli che verificano le tre condizioni seguenti:

- il perimetro misura 36 cm
- le misure dei lati, espresse in centimetri, sono numeri interi;
- la differenza tra le misure dei due lati più lunghi è uguale a 6 cm.

Il giorno dopo alcuni allievi dicono di avere trovato cinque triangoli, altri tre e altri solo due.

Qual è la risposta corretta?

Giustificate la vostra risposta indicando le misure dei lati dei triangoli trovati.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare le possibili lunghezze, espresse da numeri naturali, dei tre lati di triangoli di cui è noto il perimetro e la differenza tra le misure dei due lati maggiori.

Analisi del compito

- Immaginare le dimensioni di alcuni triangoli soddisfacenti alle tre condizioni. Rendersi conto che, dal punto di vista numerico, si tratta di trovare tre numeri naturali la cui somma è 36 e per i quali la differenza tra i due maggiori è 6.
- Rendersi conto che non ci sono molte soluzioni e, di conseguenza, che si può facilmente fare un inventario secondo numerose procedure.

  Dal punto di vista aritmetico, ci sono cinque terne possibili verificanti le tre condizioni: (20, 14, 2), (19, 13, 4), (18, 12, 6), (17, 11, 8), (16, 10, 10).
- Nel contesto geometrico, immaginare i triangoli e domandarsi se tutte le «terne» precedentemente individuate corrispondono a triangoli «costruibili».

  Costruire quindi i triangoli e constatare che ci sono solo due terne che vanno bene: (17, 11, 8) e (16, 10, 10), mentre ci sono dubbi a proposito della terna (18, 12, 6).
- Notare che il triangolo corrispondente alla terna (18, 12, 6) sembra di fatto costruibile con riga e compasso, ma che tale triangolo è degenere («quasi piatto»). Poi ragionare sul fatto che la misura della lunghezza del lato più lungo (18) è la somma delle misure degli altri due lati e superare l'illusione visiva della possibile costruzione effettiva (dovuta agli spessori delle linee o ai limiti di precisione delle misure dei lati) per dedurne che i tre vertici sono allineati e che non si tratta di un triangolo vero e proprio.

Oppure:

a partire dalle cinque terne, individuare le due terne che permettono di costruire i triangoli senza passare alla effettiva costruzione, ma ricordando la disuguaglianza triangolare.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta («due triangoli»), con l'individuazione delle due terne (17, 11, 8) e (16, 10, 10) o i disegni con l'indicazione delle misure dei lati, e una giustificazione per l'esclusione delle altre tre terne (esplicitazione della disuguaglianza triangolare o anche solo una frase del tipo «non si può costruire il triangolo», eventualmente anche citando il triangolo degenere)

3 Risposta corretta, con l'individuazione delle due terne o i disegni dei triangoli con l'indicazione delle misure dei lati senza alcun commento sul fatto che non ci sono altre soluzioni

2 Una sola terna o il disegno di un triangolo con l'indicazione delle misure dei lati a partire da quattro terne in cui non compare l'altra soluzione
oppure risposta «tre triangoli» o «la risposta corretta è tre», con le terne o i disegni delle tre soluzioni (si accetta il triangolo degenere di lati (18, 12, 6) se è effettivamente costruito)

1 Risposta «cinque triangoli» o «la risposta corretta è 5», con l'elenco delle cinque terne: (20, 14, 2), (19, 13, 4), (18, 12, 6), (17, 11, 8), (16, 10, 10)
oppure errore a livello aritmetico sulle cinque terne (dimenticanza o doppioni o triplette errate) e riconoscimento dei triangoli effettivamente costruibili

0 Risposta corretta, senza le terne né disegni
oppure incomprensione del teorema

Livello: 7, 8, 9, 10 **Origine: Suisse Romande**

17. MINESTRA PROMOZIONALE (Cat. 8, 9, 10)

Un'azienda produce un tipo di minestra al pomodoro che confeziona in lattine da un litro.

Le lattine sono di forma cilindrica con diametro interno di 8,4 cm.

Nel corso di una campagna promozionale l'azienda decide di offrire ai suoi clienti, allo stesso prezzo, lattine aventi la stessa altezza, ma contenenti il 15% di minestra in più.

Qual è il diametro interno delle nuove lattine di minestra?

Eseguite i calcoli con l'approssimazione al millimetro.

Giustificate la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Calcolare il diametro della base di un cilindro il cui volume è maggiore del 15% di quello di un altro cilindro della stessa altezza e di diametro noto.

Analisi del compito

- Comprendere che il volume interno delle lattine preparate per la promozione è maggiore del 15% del volume delle lattine solitamente utilizzate, cioè è 1,15 litri oppure 1150 cm^3.
- Determinare l'altezza delle lattine non in promozione dopo aver trasformato un litro in 1000 cm^3: l'area di base è uguale a $\pi \times (8{,}4/2)^2 \approx 55{,}42$ cm^2 (per $\pi = 3{,}142$), $\pi \times (8{,}4/2)^2 \approx 55{,}39$ cm^2 (per $\pi = 3{,}14$), da cui l'altezza è $1000/55{,}42 \approx 18{,}04$ cm o $1000/55{,}39 \approx 18{,}05$ cm
- Determinare l'area della base delle nuove lattine: $1150/18{,}04 = 1150/18{,}05 \approx 63{,}7$ cm^2 poi il diametro: $2 \times \sqrt{63{,}7/\pi} \approx 9{,}0$ cm.

Oppure uso delle proporzioni per trovare direttamente l'area di base delle lattine in promozione:

- determinare l'area di base delle lattine non in promozione: $\pi \times (8{,}4/2)^2 \approx 55{,}42$
- Calcolare l'area di base delle lattine in promozione: $V : 55{,}42 = (V \times 1{,}15) : x$; $x \approx 63{,}7$; poi il diametro: $2 \times \sqrt{63{,}7/\pi} \approx$ 9,0 cm.

Oppure con procedura algebrica (mediante il calcolo letterale):

Se V e V' indicano rispettivamente i volumi delle lattine prima della promozione e in promozione, h la loro altezza e d e d' i rispettivi diametri di base, si ha:

$V = 1$ litro $= 1000$ cm^3, $d = 8{,}4$ cm, $V' = V(1 + 0{,}15) = 1150$ cm^3.

- Calcolare V' in funzione di d': $V' = h \times \pi \times (d'/2)^2$ e $h = V/[\pi \times (d/2)^2]$, da cui $V' = (V/[\pi \times (d/2)^2] \times \pi \times (d'/2)^2$ e dunque: $V' = V \times (d'/d)^2$.
- risolvere l'equazione in d' per calcolarne il valore: $d' = d \times \sqrt{V'/V} = d \times \sqrt{1{,}15} \approx 9{,}0$ cm.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (9,0 cm o 9 cm) con una giustificazione completa e chiara

3 Risposta corretta con giustificazione poco chiara o incompleta, per esempio false uguaglianze risultato di calcoli a catena oppure il non rispetto dell'approssimazione
oppure procedura corretta e ben spiegata, ma esplicitata solo la misura del raggio (4,5)
oppure procedura corretta e ben spiegata, ma errore in un calcolo numerico

2 Risposta corretta senza alcuna giustificazione
oppure solamente calcolo dell'altezza della nuova lattina, $h' = 18$ cm, con descrizione della procedura o calcoli

1 Inizio di ricerca corretto, per esempio calcolo del volume delle nuove lattine, $V' = 1{,}15$ litre $= 1150$ cm^3
oppure procedura corretta, ma risposta errata causata da un errore nella trasformazione dei litri in centimetri cubi

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10 **Origine: Franche Comté**

18. IL TAPIS ROULANT (Cat. 8, 9, 10)

A Parigi in una stazione della metropolitana c'è un lungo corridoio che misura ben 250 metri.

Per favorire i passeggeri si è installato un tapis roulant su tutta la sua lunghezza.

Questo tapis roulant avanza con una velocità di 3 km all'ora.

Michela, che ha fretta, si mette sul tapis roulant, cammina alla sua velocità abituale e in soli 2 minuti arriva alla fine del corridoio.

Qual è la velocità abituale di Michela?

Spiegate come l'avete trovata.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Calcolare la velocità di una persona che cammina su un tapis roulant in movimento, nota la distanza e il tempo impiegato

Analisi del compito

- Capire che, per arrivare alla fine del corridoio, Michela camminando sul tapis roulant impiega un tempo minore rispetto a quello che impiegherebbe stando ferma su di esso, perché la sua velocità abituale si aggiunge a quella del tapis roulant.
- Calcolare la velocità impiegata da Michela per arrivare alla fine del corridoio: 250: (1/30) = 7500m/h cioè 7,5km/h e dedurre che la velocità abituale con cui cammina Michela è di 4,5 km/h (7,5 − 3)

Oppure

- calcolare la velocità al minuto di Michela sul tapis roulant: 250 / 2 = 125 metri al minuto, cioè 7500 metri all'ora (125x60) . Quindi la velocità di Michela è 7,5 – 3 = 4,5 km/h.

Oppure

- per via algebrica, indicata con x la velocità abituale di Michela, impostare l'equazione della velocità in metri al minuto di Michela sul tapis roulant $(50+x) = 125$, da cui ricavare $x = 75$ m/min = 4,5 km/h.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (4,5 km/h) con spiegazione completa e chiara

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta (per esempio sono corretti i passaggi aritmetici senza una spiegazione dettagliata)

2 Risposta corretta senza spiegazione o risposta errata per un errore di calcolo, ma con ragionamento corretto

1 Inizio di ricerca corretto

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Franche Comté