16° Rally Matematico Transalpino, prova 1

Nº titolo	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Ar.**	**Alg.**	**Ge.**	**Lo.**	**Orig.**
1. Andiamo a lavorar	3											x	SI
2. I bicchieri di Alberto	3	4							x				RZ
3. Scar...tabellando	3	4							x		x		AO
4. I triangoli (1)	3	4	5								x		GP
5. Torri bicolori	3	4	5						x		x		SR
6. Romeo e Giulietta		4	5								x		BB
7. La cameretta di mio cugino		4	5						x			x	LO
8. Somme e prodotti			5	6					x				GP
9. Uno strano numero			5	6					x			x	SR
10. Delle uova troppo leggere			5	6	7				x			x	FC
11. Gioco dei multipli e divisori				6	7	8			x			x	CHX
12. Il distributore				6	7	8			x			x	RV
13. Chi va piano				6	7	8			x		x		AO
14. I triangoli (2)				6	7	8	9	10			x		GP
15. Distributore di moneta					7	8	9	10	x				CI
16. La calcolatrice di Pascal					7	8	9	10	x			x	SI
17. La scatola di Nelly						8	9	10	x	x	x		SR
18. La raccolta delle olive							9	10	x	x			RV
19. I trucchi di Andrea							9	10	x	x			SI
20. La nuova strada							9	10			x		TI

1. **"ANDIAMO A LAVORAR …"** (Cat. 3)

Dopo aver salutato Biancaneve, i sette nani si recano al lavoro cantando. Essi camminano, come al solito, tutti in fila, uno dietro l'altro:

- l'ultimo della fila è Dotto
- Mammolo si trova tra Eolo e Pisolo
- Gongolo è ad una delle estremità della fila
- tra Gongolo e Cucciolo ci sono tre nani
- Pisolo non è al centro
- Brontolo è dietro a Cucciolo

Scrivete il nome di tutti i nani, dal primo all'ultimo, secondo l'ordine in cui compaiono nella fila.

Spiegate come avete fatto a dare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Logica: gestione di relazioni d'ordine e di condizioni, seriazione; formulazione di ipotesi e relative verifiche

Analisi del compito

- Comprendere, dalla prima e dalla terza condizione, che Gongolo è il primo della fila (perché l'ultimo della fila è Dotto.
- Capire dalla quarta e dall'ultima condizione che il quinto della fila è Cucciolo e che Brontolo è al sesto posto.
- Dedurre che Pisolo si può trovare in seconda o in terza posizione (per la quinta condizione non è al quarto posto).
- Concludere che Mammolo deve trovarsi al terzo posto (per la seconda condizione è infatti compreso tra Pisolo ed Eolo) e che quindi Pisolo è il secondo della fila, mentre Eolo occupa la posizione centrale.
- Scrivere l'elenco dei nani dal primo all'ultimo della fila: Gongolo, Pisolo, Mammolo, Eolo, Cucciolo, Brontolo, Dotto.

Oppure: dopo aver sistemato i due nani che sono alle estremità (Gongolo e Dotto), procedere per tentativi per gli altri, controllando che le condizioni siano verificate e aggiustare le posizioni.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Gongolo, Pisolo, Mammolo, Eolo, Cucciolo, Brontolo, Dotto) con spiegazione che mette in evidenza che si è tenuto conto di tutte le condizioni del testo.

3 Risposta corretta, con spiegazione incompleta cioè con mancata esplicitazione di tutte le condizioni necessarie

oppure l'elenco dei nani scritto in ordine inverso, ma spiegazione che mette in evidenza di come si è tenuto conto di tutte le altre condizioni

2 Risposta corretta senza spiegazione

oppure una inversione

1 Due inversioni nell'elenco

0 Altre soluzioni o incomprensione del problema

Livello: 3

Origine: Siena

2. I BICCHIERI DI ALBERTO (Cat. 3, 4)

Alberto ha ricevuto una cassa con 42 bicchieri di cristallo, che vuole sistemare nella vetrina del suo negozio.

Dispone tutti i bicchieri su 7 ripiani e su ognuno di essi mette un bicchiere in meno rispetto al ripiano precedente.

Quanti bicchieri ci sono su ogni ripiano?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, successione di numeri naturali

Analisi del compito

- Comprendere che la richiesta del problema si traduce nella ricerca di 7 numeri naturali consecutivi la cui somma sia 42.
  Procedere per tentativi:
  1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 NO
  2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35 NO
  3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42 SI

Oppure: disegnare la distribuzione dei bicchieri su 7 ripiani, fino a sistemare, per tentativi, tutti i 42 bicchieri

Oppure: partire da 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, sottrarre 28 da 42, per sapere quanti bicchieri restano: si ottiene 14; con i quali si possono ancora formare 7 gruppi da 2 da aggiungere su ogni ripiano

Oppure: eseguire la divisione di 42 per 7 per trovare il numero «medio» e trovare la soluzione per aggiustamenti successivi

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta con sequenza dei 7 numeri (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3)
oppure disegno della distribuzione sui ripiani con indicazione del numero dei bicchieri su ognuno di essi e spiegazione del procedimento o esplicitazione dei tentativi

3 Risposta corretta senza spiegazione (con verifica almeno della somma)

2 Disposizione dei bicchieri sui ripiani, con una condizione non rispettata (non ci sono 7 ripiani, o non ci sono 42 bicchieri, o lo scarto tra un ripiano e l'altro è diverso da 1)
oppure un altro errore di calcolo

1 Soluzione che rispetta solo uno dei 3 vincoli

0 Incomprensione del problema o soluzione che non considera alcuna delle tre condizioni

Livello: 3, 4

Origine: Rozzano

3. SCAR … TABELLANDO (Cat. 3, 4)

Nel cortile della scuola, i bambini hanno disegnato una grande griglia quadrata sulla quale giocano; in ogni casella hanno scritto un numero.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

***Regole di spostamento nella griglia**:*

sempre da una casella a quella vicina

seguendo le linee o le colonne

così: →, o ← , o ↑ , o ↓,

ma mai così : ↗ , né ↖ , né ↙ , né ↘

Regole del gioco

Tre giocatori partono da tre caselle diverse sul bordo della griglia.

Un compagno, all'esterno della griglia, batte su un tamburo. A ogni colpo di tamburo, i tre giocatori fanno ognuno un passo, nello stesso tempo, secondo le regole di spostamento. Quando due giocatori raggiungono la stessa casella, vincono la partita e il terzo giocatore è eliminato.

Tre amiche: Anna, Bice e Carla decidono di giocare una partita.

Anna parte dalla casella 5, Bice dalla 6 e Carla dalla 23. Con tre colpi di tamburo fanno un primo, un secondo e un terzo passo ciascuna. A questo punto due di loro sono nella stessa casella e vincono. La terza è eliminata e la partita è finita.

Chi sono le due bambine che hanno vinto e quale bambina è stata eliminata?

Su quali caselle le due vincitrici si sono potute incontrare? Indicatele tutte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria: spostamenti su reticolo a maglie quadrate tenendo presenti le indicazioni fornite

Analisi del compito

- Provare o immaginare tutti gli spostamenti possibili in tre mosse (tenere presente, tra l'altro, che si può tornare indietro o girare due volte di seguito).
- Identificare, per ogni bambina, tutte le caselle che può raggiungere con tre spostamenti:

  Anna: 2, 4, 8, 10, 14 e 20

  Bice: 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17 e 21

  Carla: 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Anna e Carla si possono incontrare nelle caselle 8 – 14 – 20; Bice è la bambina eliminata)

3 Individuazione di solo due caselle, con indicazione del nome delle vincitrici e della bambina eliminata

2 Individuazione di una sola casella con indicazione del nome delle vincitrici e della bambina eliminata

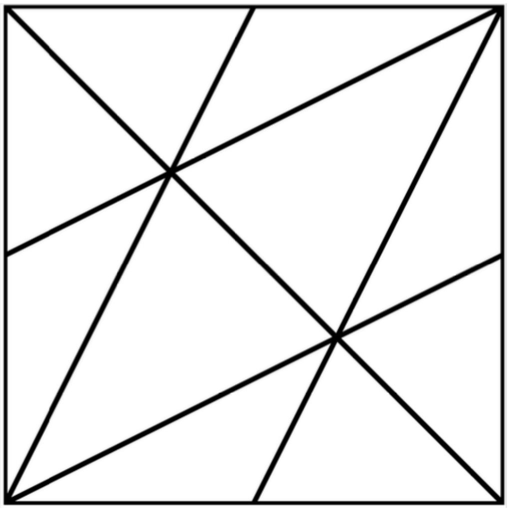
1 Individuazione di almeno una casella corretta insieme ad altre caselle errate

0 Nessun percorso individuato o incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Valle d'Aosta

4. **I TRIANGOLI** (Cat. 3, 4, 5)



In questa figura ci sono tanti triangoli.

Pietro ne ha contati 15, ma non sa se li ha trovati tutti.

Quanti triangoli si possono vedere in questa figura?

Spiegate come li avete contati.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria: individuare i triangoli in una figura complessa
Logica: organizzazione di un conteggio

Analisi del compito

- Identificare i triangoli.
- Rendersi conto che non ci sono soltanto i 10 triangoli «piccoli» affiancati che compongono il triangolo, ma che ci sono anche dei triangoli più grandi, formati da altri più «piccoli».
- Stabilire un procedimento di conteggio dei triangoli, per «categorie». Per esempio, si possono contare i triangoli in funzione del numero di triangoli “piccoli “ che contengono: (vedere il disegno alla pagina seguente)

- numero di triangoli piccoli contenuti:	1	2	3	4	5	
- triangoli contati	10	4	8	0	2	totale: 24

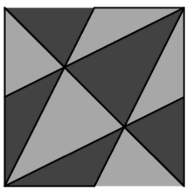
Oppure: scegliere un segmento; contare tutti i triangoli che hanno questo segmento come lato. Eliminare questo segmento, sceglierne un altro e ricominciare. E così via… facendo attenzione a contare ogni diverso triangolo una sola volta.

Oppure: scegliere un punto di intersezione dei segmenti. Contare tutti i triangoli che hanno questo punto come vertice. Eliminare questo punto e ricominciare con un altro…

- Il conteggio può essere fatto colorando la figura riprodotta in molti esemplari o mettendo una lettera sui vertici per designare i triangoli. Si può prevedere anche una serie di ritagli su molti esemplari della figura.
- Osservare la simmetria rispetto alla diagonale disegnata del quadrato permette di rendere più economico il conteggio.

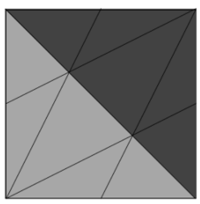
I 24 triangoli

10 triangoli formati da un triangolo piccolo

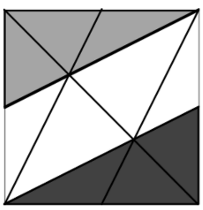


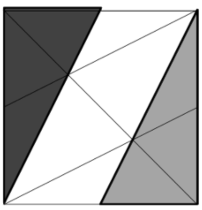
4 triangoli formati da 2 triangoli piccoli

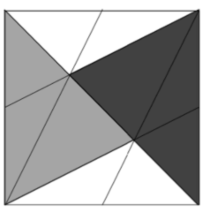
2 triangoli formati da 6 triangoli piccoli

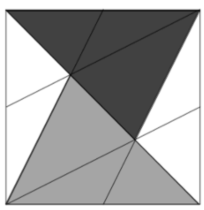


8 (4+4) triangoli formati da 3 triangoli piccoli









Attribuzione dei punteggi

4 Risposta esatta (24 triangoli) con spiegazione completa del conteggio (disegni dei triangoli di ogni «categoria», descrizione e numero di triangoli per categoria, ecc. ...)

3 Risposta esatta (24 triangoli) con spiegazione imprecisa o incompleta del conteggio senza ripetizioni e senza altre figure

oppure dai 20 ai 23 triangoli diversi trovati, senza ripetizioni, con spiegazione e senza altre figure oltre ai triangoli

2 Risposta esatta (24 triangoli) senza spiegazione, senza ripetizioni e senza altre figure oltre ai triangoli
oppure risposta esatta ma accompagnata da figure diverse dai triangoli o con delle ripetizioni
oppure dai 16 ai 19 triangoli diversi con spiegazione e senza altre figure oltre ai triangoli

1 Dai 10 ai 15 triangoli corretti diversi

0 Incomprensione del problema o altre risposte

Livello: 3, 4, 5

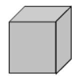
Origine: Du quotidien aux mathématiques N. Rouche & all. Ellipses 2006, adattato dal GP

5. TORRI BICOLORI (Cat. 3, 4, 5)

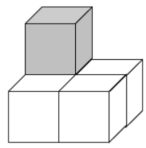
Robin possiede una scatola che contiene dei cubi grigi e dei cubi bianchi.

Costruisce parecchie torri rispettando il seguente modello:

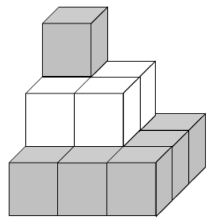
Prima torre: 1 cubo grigio.



Seconda torre:
5 cubi: 1 grigio e 4 bianchi



Terza torre:
14 cubi: 10 grigi e 4 bianchi



Robin continua a costruire delle torri cambiando colore ad ogni piano.

Quanti cubi di ogni colore utilizzerà Robin per costruire, secondo questo modello, la sesta torre?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, moltiplicazione, quadrato dei primi numeri naturali
Geometria: rappresentazione piana d'un oggetto in 3 dimensioni

Analisi del compito

- Capire che non tutti i cubi sono visibili nel disegno.
- Comprendere le regole di costruzione delle torri: alternanza dei colori; la pianta di ogni piano ha la forma di un quadrato il cui lato comporta un cubo in più del quadrato del piano immediatamente superiore (a partire dall'alto della torre, i lati dei quadrati sono di 1, 2, 3, ... cubetti).
- Determinare il numero di cubi di ogni torre e il loro colore, per costruzione effettiva con l'aiuto di materiale e conteggio uno a uno, o, piano per piano, attraverso addizione o moltiplicazione (quadrati) poi per addizione del numero di cubi dei differenti piani, ...

Oppure: calcolare il numero dei cubi della 4ª torre aggiungendo 16 bianchi: 30 cubi (14 + 16) di cui 10 grigi e 20 (4 + 16) bianchi; poi della 5ª torre: 55 cubi (30 + 25) di cui 35 grigi (10 + 25) e 20 bianchi, poi della 6ª torre: 91 cubi di cui 35 grigi e 56 (20 + 36) bianchi; (i dati possono essere organizzati in una tabella).

Oppure: osservare che i numeri dei cubi per piano sono dati dalla successione dei quadrati dei numeri naturali e utilizzare questa successione, (passaggio dal registro geometrico a quello numerico), per determinare il numero di cubi di ogni colore: grigi (1 + 9 + 25 = 35) e bianchi (4 + 16 + 36 = 56)

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (35 grigi e 56 bianchi) con spiegazione

3 Risposta corretta (35 grigi e 56 bianchi) senza spiegazione o con spiegazione insufficiente

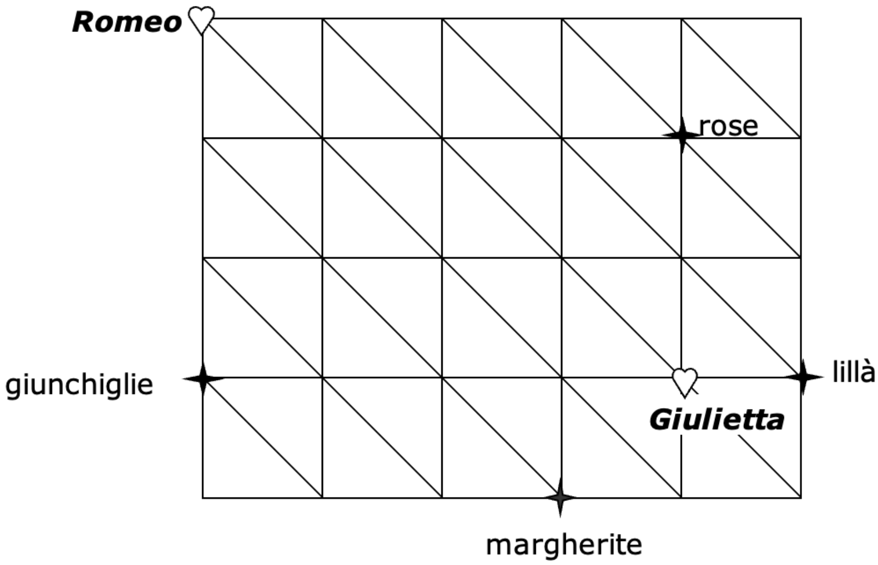
2 Procedimento corretto, ma con risposta errata dovuta a un solo errore nel conteggio o nel calcolo
o procedimento corretto, ma, come risposta, il numero totale dei cubi (91) senza distinzione dei colori

1 Soltanto il conteggio dei cubi visibili (15 grigi e 21 bianchi)

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5 **Origine: Suisse romande**

6. ROMEO E GIULIETTA (Cat. 4, 5)



Romeo cammina seguendo le strade disegnate su questa piantina.

Vuole raggiungere Giulietta e vuole anche, però, assolutamente portarle un mazzo di fiori.

Romeo può scegliere tra un mazzo di lillà o un mazzo di rose, o un mazzo di giunchiglie oppure un mazzo di margherite.

Quale mazzo di fiori deve scegliere Romeo per percorrere la strada più corta possibile?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria: spostamento su una griglia, determinazione di distanze, misura e confronto di lunghezze

Analisi del compito

- Constatare che i percorsi che vanno da Romeo a Giulietta e che passano per un mazzo di fiori sono molti
- Rendersi conto che, per confrontare la lunghezza di due percorsi, non è sufficiente contare il numero di "trattini" dello schema ma che bisogna tener conto del tipo di trattini; ce ne sono due, che corrispondono a due unità di misura non equivalenti: il lato e la diagonale di un quadrato della griglia.
- Trovare i criteri di confronto di queste due unità: una diagonale è più lunga del lato di un quadrato, ma due lati sono più lunghi di una diagonale (tramite una stima a occhio, o attraverso spostamenti reali o immaginari per confrontare direttamente le lunghezze, o tramite la misura effettuata con una riga graduata o riportando le lunghezze, oppure attraverso dei "teoremi adulti" del tipo « la strada più corta tra un punto ed un altro è la linea retta» ...).
- Trovare il percorso più corto per ogni fiore, tenendo conto dei criteri precedenti.
- Paragonare i quattro percorsi minimali ottenuti: «percorso delle giunchiglie», «percorso delle margherite» ... (tenendo sempre presente i criteri precedenti) aiutandosi eventualmente con una disposizione in tabella:

Fiori scelti	Numero di "pezzi" del percorso	Numero di lati	Numero di diagonali
Giunchiglie	7	7	0
Margherite	6	3	3
Lillà	6	3	3
Rose	6	5	1

- Notare che tra i tre percorsi di 6 pezzi, quelli corrispondenti alle margherite ed ai lillà hanno la stessa lunghezza, mentre quello delle rose comprende una diagonale al posto delle tre degli altri due. Dedurne che la strada delle rose è la più corta tra queste tre.

  Paragonare infine il percorso delle rose e quello delle giunchiglie e constatare che quando si tolgono ad ognuno i 5 lati di quadrato, restano due lati per le giunchiglie contro una diagonale per le rose e che quindi la strada delle rose è la più corta.

Oppure: misurare tutti i percorsi con una riga e confrontare le lunghezze

Oppure: riportare le differenti lunghezze di ogni percorso per ottenere un segmento della stessa lunghezza del percorso totale: poi confrontare direttamente o indirettamente le lunghezze dei percorsi ottenuti.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (rose) con argomentazione del ragionamento seguito o confronto dei tracciati nel dettaglio

3 Risposta corretta con spiegazione incompleta o poco chiara

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure, per uno dei quattro percorsi non si individua la strada più corta (per es. si dice che il percorso delle rose è di 7 lati, ribaltando di conseguenza l'ordine dei tracciati), ma viene conservata la coerenza del ragionamento

1 Inizio di ricerca coerente (differenziazione tra lunghezza di una diagonale e lunghezza di un lato di un quadrato)

0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5

Origine: Bourg-en-Bresse

7. LA CAMERETTA DI MIO CUGINO (Cat. 4, 5)

Lo zio Gino ha comprato una lunga striscia con delle stelline per decorare le pareti della camera di mio cugino Fulvio. Ne ha già incollato una parte su una parete, iniziando da sinistra:

Fulvio osserva le stelline sulla striscia che il papà ha già in parte incollato e scopre che certe sono punteggiate e altre quadrettate. Guardando con attenzione, vede che questi disegni si ripetono con regolarità sempre allo stesso modo. Dice allora al suo papà di aver capito quale sarà il disegno della stellina numero 2008 senza vedere tutta la striscia.

Dite anche voi quale sarà il disegno della stellina numero 2008 senza disegnare tutta la striscia.

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: successione numerica, regolarità, raggruppamenti per 5 e per 10 divisione con resto

Analisi del compito

- Comprendere che la successione dei disegni si ripete con regolarità ogni 5 elementi, ed eventualmente che due gruppi di 5 elementi formano un gruppo di 10 stelline
- Trovare i legami tra la striscia delle stelline e la nostra numerazione: procedere assegnando un numero ad ogni stellina dei primi due gruppi (sia a quelle che sono già disegnate, sia disegnandone altre), scoprire che le stelline corrispondenti a numeri che hanno come ultima cifra 1, 2, 6, 7 sono punteggiate, quelle che hanno come ultima cifra 3, 4, 5, 8, 9, 0 sono quadrettate. Ciò vuol dire che le stelline dei posti 11, 12, 16, 17 sono punteggiate e quelle dei posti 13, 14, 15, 18, 19, 20 sono quadrettate, etc.
- Comprendere che si può estendere la regola ai numeri seguenti, oltre le centinaia e le migliaia, ... e dedurre che corrisponde ai raggruppamenti di base 10 della nostra numerazione. La stellina 2008 è quindi quadrettata perché il suo posto è un numero che termina per 8.

Oppure: eseguire l'operazione di divisione 2008: 5 da cui si ottengono 401 gruppi con resto di 3 stelline; da qui, considerando la formazione di ogni gruppo di stelline, dedurre che la stellina 2008 è a quadretti.

Oppure: effettuare una divisione 2008:10 per ottenere 200 gruppi da 10 e un resto di 8 e dedurne che la stella 2008 è quadrettata.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (la stellina 2008 è quadrettata) con spiegazione completa e chiara (o disegni delle stelline o lista) che mostra chiaramente il legame tra il fregio e le ultime cifre del numero della stellina

3 Risposta corretta con spiegazione o illustrazione incompleta

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione né giustificazione
oppure risposta errata sulla base di una spiegazione soddisfacente ma con un errore di disattenzione

1 Inizio di ragionamento non concluso (inizio di numerazione delle stelline).

0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5

Origine: Lodi

8. DOMME E PRODOTTI (Cat. 5, 6)

In una classe, la maestra chiede agli alunni di scrivere delle addizioni la cui somma sia 25. Precisa: «Per fare questo, potete utilizzare soltanto i seguenti numeri: 1, 2, 5, 10 e 20».

Giulio propone: 10 + 5 + 5 + 5 = 25.

Sofia propone: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 10 + 5 = 25.

La maestra chiede in seguito ad ogni alunno di sostituire i segni « + » con i segni « x » e di calcolare i prodotti.

Giulio ottiene: 10 x 5 x 5 x 5= 1250.

E Sofia ottiene: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 10 x 5 = 1600.

Scrivete anche voi delle addizioni, la cui somma sia 25, utilizzando solo i numeri 1, 2, 5, 10 e 20. Poi calcolate il prodotto dei numeri utilizzati.

Qual è il prodotto più grande che si può ottenere, scegliendo bene i numeri?

E qual è il prodotto più piccolo?

Spiegate come avete trovato questi prodotti.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, moltiplicazione (associatività e elemento neutro "1")
Logica e ragionamento: congetturare, dedurre

Analisi del compito

- Leggere gli esempi e fare delle altre prove per capire che il prodotto varia anche se la somma dei numeri scelti è sempre 25.
- Scoprire, dopo numerose prove più o meno organizzate, alcune proprietà, fra le quali, in particolare:

  si possono scegliere 25 « 1 » al massimo per le somme, ma questi fattori non modificano i prodotti (1 elemento neutro della moltiplicazione); di conseguenza, scegliendo solo degli "1", si otterrà il più piccolo prodotto possibile: 1x1x1x.... = 1^{25} = 1, ma bisognerà evitare al massimo questi « 1 » nella ricerca del prodotto più grande;

  si possono scegliere un solo « 20 » o due « 10 » al massimo, cosa che limita sensibilmente il numero dei fattori e la grandezza dei prodotti ottenuti;

  i numeri "2" e "5" sembrano i più «interessanti» per la ricerca del prodotto più grande.
- Ricercare la distribuzione ottimale dei fattori « 2 » e « 5 » tra le somme e i prodotti con osservazioni del genere:

  i termini 5 = 2 + 2 + 1 di una somma diventano, nei prodotti corrispondenti: 5 > 2 x 2 x 1 = 4 ed è quindi preferibile scegliere 5;

  ma i termini 5 + 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 di una somma di 10 diventano 5 x 5 = 25 < 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32 ed è allora preferibile scegliere i numeri « 2 »;

  questo genere di osservazioni può portare alla scelta di dieci « 2 » e di un « 5 » ciò che porta a 2^{10} x 5 = 5120 (soluzione ottimale) mentre la scelta di dodici « 2 » e un « 1 » porta a 2^{12} x 1= 4096 (soluzione non ottimale).

Attribuzione del punteggio

4 Le due risposte esatte (5120; 1) con spiegazione
3 Le due risposte esatte senza spiegazione
oppure una risposta esatta e l'altra no, per esempio 1 e 4096, ma con spiegazione
2 Una risposta esatta e l'altra no (con errore dovuto non a errore di calcolo, ma a scelta non ottimale), senza spiegazione
1 Nessuna risposta esatta, ma elementi di ricerca corretti
0 Incomprensione del problema

Livelli: 5, 6

Origine: G.P.

9. UNO STRANO NUMERO (Cat. 5, 6)

Il numero di targa della macchina di Miss Math è particolare: 23651.

- È formato da 5 cifre, tutte differenti;
- La terza cifra è il prodotto delle prime due cifre (6 = 2 x 3);
- La terza cifra è anche la somma delle ultime due cifre (6 = 5 + 1).

Miss Math si chiede quanti sono i numeri di 5 cifre che hanno le stesse caratteristiche di quello della targa della sua macchina.

Aiutatela a trovare la risposta al problema e prendete nota di tutti i dettagli della vostra ricerca.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione (e elemento neutro "0"), sottrazione, moltiplicazione
Logica e ragionamento: organizzazione sistematica di un inventario

Analisi del compito

- Considerare le tre condizioni simultanee
- Capire che lo 0 non sarà mai utilizzato a causa delle sue proprietà (0 è elemento assorbente per la moltiplicazione e comparirebbe due volte come fattore e come prodotto, è neutro per l'addizione ed è il numero al quale verrebbe addizionato che sarebbe due volte presente).
- Capire che la cifra centrale non può essere né 1 (nell'addizione si avrebbe 1 + 0), né 2 (nell'addizione si avrebbe 1 + 1, o 2 + 0), né 3 (si potrebbe fare l'addizione, ma non la moltiplicazione senza ripetere delle cifre), né 4 (come per il 3), né 5 e 7 (si potrebbe fare l'addizione, ma non la moltiplicazione senza ripetere delle cifre, poiché come il 3, questi sono numeri primi). Non può essere 9 perchè le cifre della moltiplicazione possono essere solo 1 e 9 o 3 e 3.
- Capire che le cifre al centro possono essere solamente 6 o 8.
- Vedere che solamente i prodotti 2 x 3 = 6, 3 x 2 = 6, 2 x 4 = 8, 4 x 2 = 8 possono essere presi in considerazione per iniziare la ricerca dei numeri richiesti, e trovare in seguito le rispettive seguenti addizioni:

  6 = 5 + 1; 6 = 1 + 5; 8 = 7 + 1; 8 = 1 + 7; 8 = 5 + 3; 8 = 3 + 5

  Dedurre gli altri 11 numeri che soddisfano le condizioni del problema, senza contare l'esempio:

  23615, 24817, 24835, 24853, 24871, 32615, 32651, 42817, 42835, 42853, 42871

Oppure: è possibile un procedimento analogo, partendo dalle somme per arrivare ai prodotti.

Attribuzione dei punteggi

4 Individuazione di tutti i numeri (quindi l'elenco di 11 o 12 numeri a seconda che l'esempio sia incluso o meno), con spiegazione generale del procedimento seguito per la determinazione di almeno un numero

3 Serie di 9 o 10 numeri corretti (senza contare l'esempio), con spiegazione
oppure gli 11 numeri senza spiegazione

2 7 o 8 numeri diversi dall'esempio con spiegazione

1 Inizio di ragionamento corretto, con almeno 3 esempi corretti

0 1 o 2 esempi corretti o incomprensione del problema.

Livello: 5, 6

Origine: Suisse romande

10. UOVA DI CIOCCOLATO TROPPO LEGGERE (Cat. 5, 6, 7)

Il Signor Michele, proprietario di una fabbrica di cioccolato, si accorge che una delle sue 12 macchine che producono uova di cioccolato è mal regolata.

Le uova prodotte da questa macchina pesano solo 24 grammi, mentre quelle di tutte le altre ne pesano 25.

Il Signor Michele, che ama molto gli indovinelli, chiede alla moglie di scoprire quale sia la macchina difettosa, ma con una sola pesata.

Per scoprirlo, la signora Anna, che è molto astuta, numera le macchine da 1 a 12 e mette insieme sulla bilancia: 1 uovo fabbricato dalla macchina n° 1, 2 uova dalla macchina n° 2, 3 uova dalla macchina n° 3 e così via, fino a 12 uova dalla macchina n° 12.

Queste uova pesano tutte insieme 1942 grammi e la signora Anna può sapere, con questa unica pesata, qual è la macchina mal regolata.

Secondo voi, qual è la macchina mal regolata?

Spiegate il ragionamento che vi ha permesso di trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizioni, moltiplicazioni, ...
Logica e ragionamento: deduzioni

Analisi del compito

- Fare un'ipotesi sul numero della macchina mal regolata; calcolare il peso dell'insieme di uova pesate in questo caso; confrontarlo con 1942 grammi. Se i due pesi sono gli stessi, validare l'ipotesi. Se no, formulare un'altra ipotesi coerente con il risultato ottenuto (aumentare il numero della macchina se il peso ottenuto è superiore a 1942, diminuirlo in caso contrario)

Oppure

- Rendersi conto che la differenza tra il peso totale trovato (1942) e il peso totale delle uova se tutte fossero ben calibrate, (cioè il numero dei grammi che mancano), corrisponde al numero di uova che hanno un grammo di meno, e, visto come la signora Anna ha scelto i campioni da pesare, al numero della macchina che le ha fabbricate. Trovare allora il numero di uova pesate facendo la somma dei 12 primi numeri interi, a mano o con la calcolatrice 1 + 2 + .. . 12 = 78 oppure per associatività e moltiplicazione: (12 x 13)/2 = 78, e calcolare che queste 78 uova dovrebbero pesare 78 x 25 = 1950 g. (oppure fare la somma di 25 x 1 + 25 x 2 + 25 x 3+ … + 25 x 12 Trovare che il peso totale è di 1950 g).
- Constatare che mancano 1950 g – 1942 g = 8 g; dedurne che 8 uova pesano 1 grammo di meno del previsto e che provengono dalla macchina n° 8, visto che una sola è mal regolata.

Oppure: dividere il peso complessivo per il numero delle uova (1942:78 fa 24 e resto 70); constatare che mancano 8 grammi perché ogni uovo pesi 25 grammi; dedurre che la macchina numero 8 è difettosa.

Oppure: procedere per tentativi escludendo ogni volta le uova prodotte da una macchina supposta difettosa e calcolare il peso delle uova (supposte di 25 g) di tutte le altre; verificare che il numero ottenuto sia multiplo di 25

Attribuzione del punteggio

4 Risposta corretta (macchina n° 8) con spiegazioni complete e chiare

3 Risposta corretta, con spiegazioni incomplete o poco chiare

2 Risposta corretta, senza spiegazione
oppure risposta errata (errore di calcolo) con spiegazione

1 Inizio di ricerca coerente

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Franche-Comté

11. GIOCO DEI MULTIPLI E DIVISORI (Cat. 6, 7, 8)

Due giocatori A e B giocano su una griglia di 40 caselle numerate da 1 a 40:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40

Comincia il giocatore A: sbarra un numero, a sua scelta, sulla griglia.

Poi, il giocatore B sbarra un altro numero: questo numero deve essere un multiplo o un divisore del numero sbarrato dal giocatore A.

Poi ogni giocatore, a turno, sbarra un numero che deve essere multiplo o divisore dell'ultimo numero sbarrato.

Il gioco finisce quando uno dei due giocatori non può più sbarrare alcun numero. Questo giocatore perde la partita.

Esempio:

Ecco i numeri che sono stati sbarrati dai due giocatori nel corso di una partita:

Giocatore A: 4 9 12 2 5 1

Giocatore B: 36 3 24 10 15 37

Il giocatore A non può più giocare perchè nella griglia non ci sono multipli di 37 e i due soli divisori di 37 (« 1 » e « 37 ») sono già sbarrati. Il vincitore è quindi il giocatore B.

Giulia, che è molto brava in questo gioco, sa che quando gioca per prima può vincere a colpo sicuro e rapidamente in poche mosse. Basta che scelga bene il primo numero da sbarrare.

Quale può essere questo numero? Trovate tutte le possibilità.

Spiegate come le avete trovate.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: multipli e divisori, numeri primi
Logica e ragionamento: congetturare e dedurre

Analisi del compito

- Giocare qualche partita per scoprire tutti i vincoli del gioco. Sapere cosa sono un divisore ed un multiplo, capire che non si è obbligati ad alternare multipli e divisori ma che si può passare attraverso più multipli o divisori successivi, scoprire i numeri che hanno molti multipli e divisori e quelli che ne hanno pochi.
- Capire che dal momento in cui si può scegliere un numero che non ha più né divisori, né multipli liberi si vince immediatamente.
- Di conseguenza bisogna evitare di lasciare all'avversario la possibilità di scegliere un numero di cui tutti i multipli e divisori sono già stati sbarrati. Nell'esempio dato, il giocatore A ha giocato male il penultimo colpo scegliendo « 1 » perché dopo di lui, il giocatore B poteva scegliere il « 37 » che finisce il percorso.
- Quando si è capito che l' « 1 » è da evitare, perchè conduce ad un'impasse, come il « 37 », bisogna tentare di forzare il proprio avversario a cancellare questo « 1 ». Bisogna allora notare che il giocatore che inizia da uno dei quattro numeri 23, 29, 31 o 37 (che non hanno multipli nella tavola da 1 a 40 e hanno solo 1 come divisore) costringe il suo avversario a cancellare « 1 » al primo colpo e permette al primo giocatore di tornare su uno degli altri tre numeri, che a quel punto non avrà più né multipli né divisori liberi.

Osservazione: i quattro numeri: 23; 29; 31; 37 sono primi e superiori a 20. Scegliendo un numero primo inferiore a 20, si lascia la possibilità all'avversario di cancellare uno dei suoi multipli e di vincere con una successione di colpi obbligati.

Per esempio:

primo giocatore:	19	2	13	3	11	1
secondo giocatore:	38	26	39	33	22	

Attribuzione dei punteggi

4 I quattro numeri (23, 29, 31, 37), con spiegazione

3 I quattro numeri (23, 29, 31, 37), senza spiegazione
oppure tre di questi numeri con spiegazione
oppure i quattro numeri (23, 29, 31, 37) accompagnati da uno o due altri numeri

2 Solo due dei numeri corretti, con spiegazione
oppure tre numeri, ma senza spiegazione o accompagnati da altri numeri primi inferiori a 20

1 Un numero corretto con spiegazione
oppure due numeri corretti, ma senza spiegazione, o accompagnati da altri numeri primi inferiori a 20
oppure tre o quattro numeri corretti, ma accompagnati da altri numeri tra i quali anche dei numeri non primi

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8

Origine: Attività «ludica» classica dell'ambito dei divisori e multipli, «riscoperta» recentemente dalla scuola di «Juniper Green» (dintorni di Edimburgo, in Scozia) proposta da Châteauroux

12. IL DISTRIBUTORE (Cat. 6, 7, 8)

Claudio passa vicino ad un distributore e legge il costo al litro della benzina.

Questo prezzo è esposto per mezzo di cartellini allineati: quattro di questi cartellini sono mobili e espongono ognuno una cifra (1, 2, 5 e 7), un cartellino fisso (in grigio) espone la virgola " , " e un altro (pure in grigio) espone il simbolo della moneta, " € ":

€	**1**	**,**	**2**	**5**	**7**

Con la coda dell'occhio Claudio vede il benzinaio che sta modificando il prezzo ed ha in mano un cartellino mobile con un "8".

A questo punto si ricorda che ieri sera alla radio hanno detto che il prezzo della benzina, oggi, sarebbe aumentato e che per fare un pieno di 40 litri si dovrà spendere tra € 1 e € 1,30 in più.

Quale potrebbe essere il nuovo prezzo della benzina?

Indicate tutte le possibilità e scrivete i dettagli della vostra ricerca.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Combinatoria
Aritmetica: cifra e numero, operazioni

Analisi del compito

- Capire che se il benzinaio ha in mano un cartellino con scritto il numero 8, le combinazioni possibili del prezzo devono tenere conto di queste condizioni:
- Quando si sostituisce un cartellino già presente, si può ancora utilizzare quello tolto per formare il nuovo prezzo;
  - L' « 1 » non può essere sostituito con il nuovo cartellino « 8 » né con uno dei vecchi « 2 », « 5 » o « 7 » poiché l'aumento sarebbe molto più consistente di quello annunciato.
  - Il « 2 » non può essere sostituito da « 8 », « 5 » o « 7 » poiché l'aumento sarebbe superiore a 30 centesimi al litro o € 12 per 40 litri.
  - Quindi l'« 8 » deve sostituire il « 5 » o il « 7 » e occorre considerare le disposizioni senza ripetizione di questi tre cartellini presi a due a due per la seconda e la terza cifra dopo la virgola.

si può, per esempio, procedere nel modo seguente

Prezzo nuovo	Prezzo vecchio	Differenza/litro	Aumento per 40 litri
1,258	1,257	0,001	0,001 x 40=0,04
1,285	1,257	0,028	0,028 x 40=1,12
1,278	1,257	0,021	0,021 x 40= 0,84
1,287	1,257	0,03	0,03 x 40= 1,2

Oppure: costruire una tabella analoga relativa ai prezzi complessivi: calcolare il costo di 40 litri di benzina al prezzo vecchio (1,257 x 40 = 50,28), aggiungere l'aumento massimo e l'aumento minimo (da 51,28 a 51,58) e calcolare il nuovo prezzo al litro che si situerà tra 51,28 : 40 = 1,282 e 51,58 : 40 = 1,289. Concludere che il prezzo nuovo della benzina, con le cifre a disposizione e tenendo conto dell'informazione ricevuta dalla radio potrebbe essere o 1,287 o 1,285 al litro.

Oppure: calcolare l'intervallo di aumento per litro: tra € 1: 40 = 0,025 € e € 1,30 : 40 = 0, 0325 €. Il nuovo prezzo al litro si situerà perciò tra € 1,285 e € 1,289 5. Le due uniche possibilità togliendo una cifra e sostituendola con l'8 sono € 1,285 e € 1,287.

Attribuzione dei punteggi

4 Le due soluzioni (1,287 o 1,285) con spiegazione chiara e dettagliata della loro unicità

3 Le due soluzioni con spiegazione incompleta o solo con una tabella che non mette in rilievo i motivi per cui si sono escluse le altre posizioni della cifra 8

2 Una delle due soluzioni con spiegazione chiara e dettagliata e/o esclusione di una per errori di calcolo

1 Inizio ricerca oppure una soluzione senza spiegazioni

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8 **Origine: Riva del Garda**

13. CHI VA PIANO (Cat. 6, 7, 8)

Matteo è un bravo automobilista ed ha una guida molto regolare. Oggi parte per le vacanze. Passa da Paesino, attraversa Vieneprima, poi Vienedopo, per poter raggiungere Marina Bella, la sua meta. La nonna lo raggiungerà tra qualche giorno, guidando, prudentemente, la sua vecchia Fiat 500.

Matteo le telefona per informarla sui tempi di percorrenza. «Sono passato da Paesino alle 8 del mattino, da Vieneprima alle 8:45, e da Vienedopo alle 9:30. Alle 10:30 ero a Marina Bella. Non ho fatto imprudenze. Anzi sono andato sempre alla stessa velocità!».

Quando la nonna fa lo stesso percorso, passa con la sua macchina da Paesino alle 9:10, ma raggiunge Vieneprima alle 10:10. La nonna si accorge di andare più piano di Matteo, ma siccome è molto prudente, non accelera e continua con la sua andatura tranquilla e regolare.

A che ora arriverà la nonna a Vienedopo e a che ora raggiungerà Marina Bella?

Spiegate come avete trovato la soluzione.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizioni, moltiplicazioni, divisioni, proporzionalità
Misure di tempo

Analisi del compito

- Capire che la nonna ha accumulato 15 min di ritardo rispetto al tempo previsto nel tratto tra Paesino e Vieneprima (1 ora invece di 45 minuti).
- Considerare che in 45 min ci sono 3 quarti d'ora e concludere che accumula un ritardo di 5 min ogni 15.

Calcolare il tempo impiegato da Matteo tra la seconda e la terza tappa (45 min) e tra la terza e la quarta (60 min)

Il ritardo accumulato quindi sarà di 15 min tra la seconda e la terza (45 : 15 x 5) e di 20 min (60 : 15 x 5) tra la terza e la quarta.

Aggiungere il ritardo della nonna al tempo impiegato da Matteo per trovare i due risultati richiesti: 11h10 e 12h30

Oppure organizzare i dati in una tabella e completarla, eventualmente servendosi delle proporzioni (45:60=60:x da cui x=80)

Oppure: organizzare i dati in una tabella e utilizzare l'uguaglianza degli scarti tra 8h e 8h45 e tra 8h45 e 9h30 per dedurre che la nonna impiega lo stesso tempo per andare da Paesino a Vieneprima e da Vieneprima a Vienedopo. Poiché lo scarto tra 9h30 e 10h30 (60 minuti) è 4/3 dello scarto tra 8h45 e 9h30 (45 minuti), si può utilizzare la stessa relazione per calcolare il tempo impiegato dalla nonna per andare da Vienedopo a Marinabella: 4/3 di 60 minuti, cioè 80 minuti.

	Paesino		Vieneprima		Vienedopo		Marina Bella
Matteo	8:00	+ 45 min	8:45	+45 min	9:30	+60 min	10:30
Nonna	9:10	+60 min	10:10	+60 min	11:10	+80 min	12:30

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (alle ore 11:10 passa per Vienedopo e alle 12:30 arriva a Marina Bella) con spiegazione chiara del ragionamento seguito.

3 Risposta corretta ma con spiegazione non completa o poco chiara

2 Procedimento corretto senza spiegazione
oppure procedimento corretto ma con un errore

1 Inizio di ragionamento corretto o risposta corretta solo per Vienedopo (11h10)

0 Incomprensione del problema

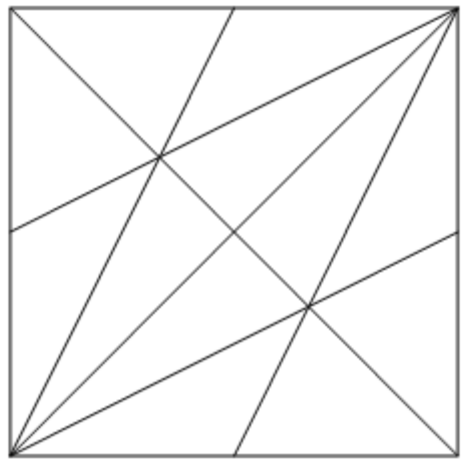
Livello: 6-7-8

Origine: Valle d'Aosta

14. I TRIANGOLI (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

In questa figura ci sono molti triangoli.

Pietro dice che se ne possono vedere 32, ma non sa se li ha trovati tutti.



Quanti triangoli si possono vedere in questa figura?

Spiegate come li avete contati.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria: triangoli (riconoscimento a partire dalle caratteristiche: 3 vertici, 3 lati); simmetria
Conteggio

Analisi del compito

- Rendersi conto che non ci sono soltanto i 12 triangoli «piccoli», ma che ci sono anche dei triangoli più grandi, formati da altri più «piccoli»
- Stabilire un procedimento di conteggio dei triangoli, per «categorie». Per esempio, si possono contare in funzione del numero di triangoli "piccoli " che contengono: (si vedano i disegni nella pagina seguente)

numero di triangoli piccoli contenuti:	1	2	3	4	5	6	
triangoli contati	12	8	12	4	0	4	totale: 40

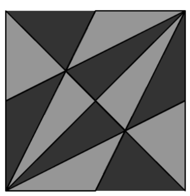
Oppure: scegliere un segmento; contare tutti i triangoli che hanno questo segmento per lato. Eliminare questo segmento, sceglierne un altro e ricominciare. E così via …

Oppure: scegliere un punto di intersezione dei segmenti. Contare tutti i triangoli che hanno questo punto per vertice. Eliminare questo punto e ricominciare con un altro ...

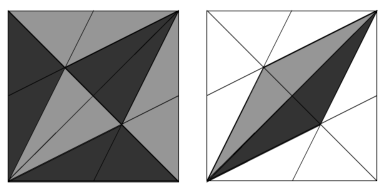
- Il conteggio può essere fatto colorando la figura riprodotta in molti esemplari o mettendo una lettera sui vertici per designare i triangoli. Si può prevedere anche una serie di ritagli su molti esemplari della figura.
- Osservare una simmetria in rapporto alla diagonale disegnata del quadrato permette di rendere più economico il conteggio.

I 40 triangoli

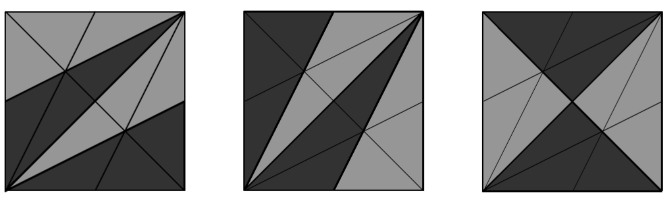
12 triangoli formati da 1 triangolo piccolo



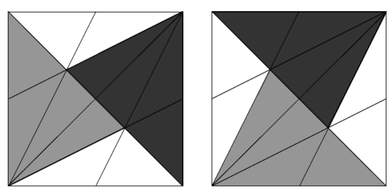
8 (6 + 2) triangoli formati da 2 triangoli piccoli



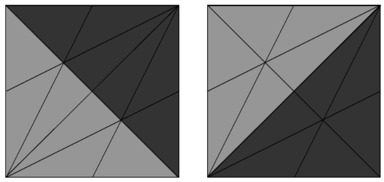
12 (4+4+4) triangoli formati da 3 triangoli piccoli



4 (2+ 2) triangoli formati da 4 triangoli piccoli



4 (2 + 2) triangoli formati da 6 triangoli piccoli



Attribuzione del punteggio

4 Risposta esatta (40 triangoli) con spiegazione completa del conteggio (disegni dei triangoli di ogni «categoria», descrizione e numero di triangoli per categoria, ecc. ...)

3 Risposta esatta «40 triangoli» con spiegazione imprecisa o incompleta del conteggio, senza ripetizioni e senza altre figure o dai 35 ai 39 triangoli senza ripetizioni con spiegazione senza altre figure oltre ai triangoli diverse dai triangoli

2 Risposta esatta «40 triangoli» senza spiegazione senza ripetizioni e senza altre figure oltre ai triangoli, diverse dai triangoli o risposta esatta «40 triangoli», ma accompagnata da figure diverse dai triangoli

o dai 30 ai 34 triangoli corretti con spiegazione senza ripetizione e senza altre figure oltre ai triangoli, diverse dai triangoli

1 Dai 20 ai 29 triangoli corretti senza ripetizioni

0 Incomprensione del problema o altre risposte

Livello: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: ***Du quotidien aux mathématiques*** **N. ROUCHE & all. Ellipses 2006, adattato dai CP**

15. DISTRIBUTORE DI MONETE (Cat. 7, 8, 9, 10)

In un supermercato di Transalpinia, un distributore di moneta cambia le banconote in monete del paese, che sono di sei diversi tipi: FT 0,10; FT 0,20; FT 0,50; FT 1; FT 2; e FT 5 (Il «FT» è il simbolo del franco di Transalpinia).

Questo distributore particolare dà per ogni banconota soltanto delle monete per le quali il prodotto del loro valore valga 1.

Per esempio:

Con una banconota da FT 10 si possono ricevere 4 monete da FT 0,50 e 4 monete da FT 2 perché 0,5 x 0,5 x 0,5 x 0,5 x 2 x 2 x 2 x 2 = 1

oppure 2 monete da FT 0,50, 2 monete da FT 2 e 5 monete da FT 1;

oppure ...

Graziella e Gianna hanno messo ognuna una banconota da FT 20 e Graziella ha ricevuto 4 monete meno di Gianna.

Quante monete ha ricevuto Graziella e quali?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: scomposizione di 1 in prodotto di numeri decimali

Analisi del compito

- Verificare gli esempi dati.
- Capire che si tratta di trovare come 1 possa essere scomposto nei numeri decimali proposti e identificare le tre scomposizioni in fattori: 1 = 5 x 2 x 0,1 = 5 x 0,2 t 2 x 0,5 e trovare le tre somme corrispondenti: 5 + 2 + 0,1 = 7,1; 5 + 0,2 = 5, 2 e 2 + 0,5 = 2,5.
- Cercare le scomposizioni additive di 20 con i termini 2,5; 5,2; 7,1 e 1. Rendersi conto che l'unica scomposizione additiva del 20 che coinvolga il 5,2 e il 7,1 è: 20 = 2,5+5,2+5,2+7,1 (in tutto 9 monete). Comprendere quindi che tutte le altre scomposizioni additive del 20 contengono solo 2,5 e/o 1.
- Stilare l'inventario delle scomposizioni di 20 con monete da FT 0,5, FT 1 o da FT 2.

Monete da (in FT)	0.5	1	2	prodotto	somma	n. totale di monete
	0	20	0	1	20	20
	1	imp	1	1	2,5 + ??	
	2	15	2	1	20	19
	3	imp	3	1	7,5 + ??	
	4	10	4	1	20	18
	6	5	6	1	20	17
	8	0	8	1	20	16

Confrontando tutte le possibili scomposizioni di FT 20, rendersi conto che le uniche due che differiscono di 4 monete sono quella che utilizza 20 monete e quella che ne utilizza 16. Quindi Graziella riceve 16 monete: 8 da 0,5 e 8 da FT 2.

Oppure: procedere per tentativi per vedere che le sole coppie possibili sono le monete da 0,5 e FT 2 da completare con delle monete da FT 1.

Attribuzione del punteggio

4 Soluzione esatta (Graziella riceve 16 monete: 8 da 0,5 e 8 da FT 2) e spiegazione (inventario dettagliato di tutte le possibili scomposizioni) che evidenzia l'unicità della soluzione

3 Soluzione esatta, con spiegazione parziale (manca l'unicità)

2 Soluzione esatta senza spiegazione, trovata soltanto per tentativi

1 Ricerca che mette in evidenza che si è capito il prodotto 1

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8. 9, 10 **Origine: CI**

16 LA CALCOLATRICE DI PASCAL (Cat. 7, 8, 9, 10)

Pascal ha una calcolatrice che possiede due tasti speciali:

- un tasto U che dà il quoziente intero della divisione per 10 del numero scritto sul visore (senza il resto)

  (per esempio, se sul visore c'è scritto 859 e poi si preme U, si ottiene 85; ugualmente, se sul visore c'è 7, il tasto U dà 0; se c'è 24,35, il tasto U dà 2; ...);
- un tasto R che raddoppia il numero scritto sul visore

  (per esempio, se sul visore è scritto 125 e poi si preme R, si ottiene 250; ...)

Oggi, Pascal ha scritto sul visore della sua calcolatrice un numero intero positivo di due cifre, divisibile per 7. Ha poi usato solo i tasti speciali, in tutto tre volte. Alla fine, sul visore è comparso il numero 24.

Qual è il numero che ha scritto Pascal?

Indicate tale numero e l'ordine in cui Pascal può aver premuto i tasti speciali della sua calcolatrice per ottenere 24.

Giustificate le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: cifra, numero e notazione posizionale; idea di composizione di operatori
Logica: combinatoria (disposizioni con ripetizione); ragionamento ipotetico deduttivo

Analisi del compito

- Considerare che il numero scritto da Pascal, poiché è di due cifre e multiplo di 7, fa parte del seguente insieme:

  14 21 28 35 42 49 56 63 70 77 84 91 98
- Considerare poi successivamente le due possibilità per il primo tasto premuto: U oppure R

  a) Il tasto U applicato a ciascuno dei numeri della precedente successione darebbe:

  1 2 2 3 4 4 5 6 7 7 8 9 9

  Per ottenere 24, bisogna premere due volte R, cioè moltiplicare per 4. Solo il 6 lo consente.
  Da cui una prima soluzione: Pascal è partito da 63 e ha eseguito U-R-R.

  b) Il tasto R dà dapprima i multipli di 14 seguenti:

  28 42 56 70 84 98 112 126 140 154 168 182 196

  Per ottenere 24 bisognerà utilizzare il tasto U (poiché tutti questi numeri sono maggiori di 24), ma una sola volta (in quanto tutti i numeri diventerebbero 0 oppure 1 se lo si utilizzasse due volte).

  Con U seguito da R, solo 126 dà 12 poi 24. Da cui una seconda soluzione: Pascal è partito da 63 e ha fatto R-U-R.

  Con R seguito da U, per arrivare a 24, bisognerebbe che R desse un numero tra 240 e 249, cosa che non è possibile a partire dai numeri della lista precedente (112 darebbe 224 e 126 darebbe 252). La combinazione R-R-U non può dare 24.

Oppure: tenere presente che i tasti speciali R, U, sono utilizzati 3 volte, quindi l'ordine in cui possono succedersi è espresso da una delle seguenti terne: RRR – RRU – RUR – URR – RUU – URU – UUR – UUU.

- Procedere direttamente nella ricerca del numero giusto fra quelli indicati, considerando le terne dei tasti che consentono di arrivare al 24.
  - Rendersi conto che non è possibile la sequenza RRR (che equivale a moltiplicare per 8) perché nessuno dei multipli di 7 considerati, moltiplicato per 8, dà 24.
    Non è possibile neppure una sequenza in cui il tasto U compare 3 volte o 2 volte poiché il maggior numero possibile con il tasto R è 196 e 2 tasti U danno al massimo 1. Rimangono da considerare le sequenze RRU, RUR, URR.
  - Nel primo caso, si osserva che partendo dal 56 la sequenza RRU porta a 56 x 4 = 224 (con i tasti R e R) e quindi a 22 (con il tasto U), mentre partendo da 63, la stessa sequenza porta a 63 x 4 = 252 e quindi a 25, pertanto non si può ottenere il 24.
  - Nel caso RUR l'unico numero che funziona è 63: 63 x 2 = 126 che porta a 12, togliendo la cifra delle unità, e quindi a 24, raddoppiando.

- Nel caso URR, è di nuovo il numero 63 che funziona: togliendo la cifra delle unità, si ottiene 6 e poi, moltiplicando per 4, si arriva a 24.

Oppure: partire da 24 e risalire al numero di partenza invertendo l'ordine delle operazioni, con una ricerca analoga:

RRR non va bene perché bisognerebbe partire da 3 e moltiplicare per 8, non multiplo di 7.

Come in precedenza, si eliminano le sequenze con due o tre tasti U e restano RRU, RUR e URR.

RRU non va bene: da 24, bisognerebbe passare da 240, 244, 248 (i soli divisibili per 4) per arrivare a 60, 61 o 62, non multipli di 7.

RUR, va bene: da 24 (in ordine inverso), si passa a 12 poi a 120, 122, 124, 126 o 128 poi a 60, 61, 62, 63, 64 di cui uno, 63 è multiplo di 7.

URR va bene: da 24 (in ordine inverso) si passa a 6 poi ad un numero compreso tra 60 e 69 multiplo di 7, cioè 63.

- Concludere che il numero scritto da Pascal è 63 e che Pascal può aver ottenuto 24 in due modi, usando i tasti speciali secondo le sequenze RUR o URR.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (63; due possibilità: RUR o URR) con giustificazione esauriente

3 Risposta corretta e completa, con spiegazione incompleta o che non mostra l'esaustività della ricerca
oppure: trovato il numero 63, ma con una sola sequenza di tasti e le spiegazioni corrispondenti

2 Trovato il numero 63, ma indicata solo una possibilità per la sequenza dei tasti, senza spiegazioni chiare

1 Inizio corretto di ragionamento

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

17. LA SCATOLA DI NELLY (Cat. 8, 9, 10)

Nelly ha una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, di cui le tre dimensioni interne, espresse in centimetri, sono numeri interi. Può mettere un ferro da calza, lungo esattamente 15 cm, in diagonale, con un'estremità in un vertice inferiore e l'altra estremità nel vertice superiore ad esso opposto.

Quali possono essere le dimensioni della scatola di Nelly?

Spiegate la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: operazioni in N, somma di quadrati e radice quadrata
Geometria: parallelepipedo rettangolo e teorema di Pitagora

Analisi del compito

- Elaborare una rappresentazione piana del parallelepipedo (o appoggiarsi su una rappresentazione mentale, o lavorare su un modello a tre dimensioni).
- Riconoscere un triangolo rettangolo che permetta di calcolare la lunghezza di una delle diagonali del parallelepipedo e per fare ciò evidenziare la diagonale di una faccia e uno spigolo.
- Utilizzare la relazione tra la lunghezza di una diagonale del parallelepipedo e le lunghezze dei tre spigoli mediante l'applicazione del teorema di Pitagora, ripetuta due volte di seguito (una prima volta per ottenere la diagonale di una faccia del parallelepipedo, $d^2 = a^2 + b^2$ oppure $d = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ e la seconda per ottenere la diagonale (che collega due vertici opposti del parallelepipedo), per arrivare ad una relazione del tipo $15^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- Altro modo di procedere: utilizzare direttamente l'applicazione della relazione nel parallelepipedo, data dalla formula precedente, con a, b, c, d interi;
- Cercare i modi di scomporre $225 = 15^2$ nella somma di tre quadrati di numeri interi. Utilizzare un procedimento metodico, per esempio quello che consiste nel considerare successivamente tutti i quadrati di 14, 13, 12 , ... , 9 come primo dei tre termini, (8^2 non può essere il più grande perché $3 \times 64 = 192 < 225$), calcolare la differenza a 225 (cosa che dà la lista 29, 56, 81, 104, 125, 144) e verificare se questa differenza è anch'essa la somma di due quadrati.

  Si arriva così a $225 = 196 + 29 = 196 + 25 + 4$ soluzione 14, 5 e 2
  $225 = 121 + 104 = 121 + 100 + 4$ soluzione 11, 10 e 2
  $225 = 100 + 125 = 100 + 100 + 25$; soluzione 10, 10 e 5

Attribuzione dei punteggi

4 Le tre soluzioni (14, 5, 2; 11, 10, 2; 10, 10, 5) con spiegazione
3 Le tre soluzioni senza spiegazione o due 2 soluzioni con spiegazione
2 Due soluzioni senza spiegazione o una soluzione con spiegazione (è stata applicata una relazione del tipo $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$)
1 Tentativi e organizzazione di una ricerca, ma senza aver totalmente stabilito la relazione che permette di risolvere il problema
0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Suisse romande

18. LA RACCOLTA DELLE OLIVE (Cat. 9, 10)

Nel parco della scuola professionale di Riva c'è un grande oliveto, che viene coltivato dagli allievi delle classi A e B. È ormai arrivato il tempo della raccolta delle olive.

Lunedì mattina ha iniziato la classe A, composta da 12 allievi, e in 4 ore precise ha raccolto 1/6 di tutte le olive.

Martedì nello stesso tempo la classe B ha raccolto 1/4 delle olive di tutto l'oliveto. Tutti gli allievi delle due classi hanno raccolto ciascuno lo stesso quantitativo di olive.

Mercoledì, l'insegnante, sentendo che sta arrivando una perturbazione con conseguente brutto tempo, decide di chiamare gli allievi delle due classi A e B assieme e chiede loro di terminare la raccolta, lavorando con lo stesso ritmo dei giorni precedenti.

Quanti sono gli allievi della classe B?

Quanto tempo impiegheranno gli allievi mercoledì a terminare la raccolta delle olive?

Spiegate e motivate le vostre soluzioni.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: frazioni, proporzionalità
Algebra: equazioni di primo grado

Analisi del compito

- Per la prima domanda bisogna mettere in relazione le parti raccolte, 1/6 e ¼, con il numero di alunni, 12 e il numero sconosciuto di alunni della classe B ; poi rendersi conto che si è in presenza di grandezze proporzionali, visto che ogni allievo raccoglie la stessa quantità di olive durante le 4 ore (attraverso riflessioni del tipo: « più si è numerosi e più è grande la parte raccolta» o se si raddoppia il numero di alunni, la parte raccolta raddoppia» ...).
- Effettuare i calcoli corrispondenti utilizzando una delle proprietà della proporzionalità. Per esempio: dopo aver trasformato 1/6 e 1/4 in frazioni con lo stesso denominatore 2/12 e 3/12, vedere che le parti di oliveto raccolte passano da 2 a 3 tramite una moltiplicazione per 3/2 e che il numero di alunni della classe B è 3/2 x 12 = 18; o eseguire il calcolo della «quarta proporzionale»: 12 : 1/6 = n : 1/4. Da cui n = 18.
- Per rispondere alla seconda domanda ci sono diverse procedure che utilizzano le frazioni o un'equazione.
- Con le frazioni si può partire dal calcolo 1/4 +1/6 = 5/12, e considerare che l'oliveto è 12/12; resta allora 7/12 per mercoledì. Se le due classi hanno raccolto 5/12 in 4 ore, si imposta una nuova proporzione per arrivare a 240 x 7/5 = 336 per terminare avranno bisogno, insieme, di 240 x 7/5 = 336 minuti, che corrispondono a 5 ore e 36 minuti.
- Con un'equazione, si designa con x il tempo necessario per raccogliere tutte le olive e si può scrivere allora: $(1/4)x + (1/6)x = 4$, ciò che porta a $x = 48/5$ d'ora, che corrisponde a 9 ore e 36 minuti. Togliendo le 4 ore già effettuate, si trova che restano 5 ore e 36 minuti per terminare la raccolta.

Oppure: dopo avere osservato che i 30 allievi delle due classi in 4 ore raccolgono 1/6 + 1/4 = 5/12 di olive, impostare ad esempio la proporzione $5/12 : 4 = 7/12 : x$ dove x indica il tempo necessario a raccogliere tutte le olive, espresso in ore e ricavare che $x = 28/5$ di ora cioè 5h e 36m.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta alle due domande (18 ragazzi; 5h e 36 m) con spiegazione chiara e dettagliata

3 Risposta corretta alle due domande senza spiegazione

2 Risposta corretta al primo quesito con spiegazione chiara e dettagliata

1 Risposta corretta a una domanda senza spiegazione
oppure risposta 11 ore e 12 minuti dovuta all'errore di considerare 8 ore complessive di lavoro tra la raccolta di A e quella di B

0 Incomprensione del problema

Livelli: 9, 10 **Origine: Riva del Garda**

19. I TRUCCHI DI ANDREA (Cat. 9, 10)

Andrea si diverte ad inventare trucchi per scoprire, con pochi indizi, i numeri pensati da altri. Un giorno propone a suo nonno:

"*Nonno*

- *pensa un numero di due cifre,*
- *scambia fra di loro le cifre del "numero pensato" (P) per formare un secondo numero "capovolto" (C),*
- *dimmi la somma di questi due numeri (P + C) e la differenza di questi due numeri (P – C) ed io indovinerò il numero che hai pensato."*

"*Bravo*" - gli risponde il nonno – "*ho capito il tuo trucco, ma sei sicuro che funzioni con tutti i numeri a due cifre?*".

Avete capito anche voi il trucco inventato da Andrea e siete sicuri che funzioni per tutti i numeri interi a due cifre?

Funzionerebbe anche con i numeri interi ad una cifra se si scrivessero con uno « 0 » davanti come 01, 02, 03 ...?

Spiegate il trucco e dite perché funziona o non funziona.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: numerazione posizionale decimale, scrittura polinomiale dei numeri scritti in base 10
Algebra: sistemi di equazioni di primo grado a due incognite

Analisi del compito

- Scrivere i due numeri in forma polinomiale. Il numero pensato "*du*" (con *d* decine e *u* unità) diventa P = 10*d*+*u* e il numero capovolto "*ud*" diventa C=10*u*+*d*.
- Rendersi conto, con tentativi o con calcolo algebrico, che la somma P + C = 11(*d*+*u*) è un multiplo di 11 e che la differenza P - C= 9(*d*-*u*) è un multiplo di 9, attraverso dei tentativi o con un calcolo algebrico, potendo essere la differenza positiva o negativa.

Con tentativi	P	C	P + C	P - C
	25	52	77 = **7**x11	-27= **-3**x9
	83	38	121 = **11**x11	45= **5**x9

Con l'algebra: (10*d*+*u*)+(10*u*+*d*) = 11*d*+11*u* = 11(*d*+*u*) e: (10*d*+*u*)-(10*u*+*d*) = 9*d*-9*u* = 9(*d*-*u*)

- Aritmeticamente, dopo diversi tentativi, rendersi conto che uno dei fattori di ogni somma P + C è la somma dei valori delle due cifre (esempio: 77 = 7x11 = (2+5)x11) e, in modo analogo, che uno dei fattori di ogni differenza P -C è la differenza dei valori delle due cifre (esempio: -27 = -3x9 = (2-5)x9) e che pertanto si possono trovare mentalmente le due cifre di cui si conoscono la somma e la differenza, per eliminazioni successive.

  Per esempio se si ricevono le due indicazioni 88 e 18, si sa che la "somma e la differenza delle due cifre" sono 8 e 2 e che tra le scomposizioni di : 8+0, 7+1, 6+2, 5+3, 4+4, ... bisogna conservare soltanto la coppia (5;3) la cui differenza è 2 per sapere che il numero pensato P è 53.

  Altro esempio con una differenza negativa: 132 e -36 porta alla somma 12 e alla differenza -4 e si può cominciare l'inventario delle scomposizioni di 12 con un primo termine più piccolo del secondo: 5+7, 4+8, per fermarsi a quest'ultima coppia (in cui la differenza è –4) e ottenere P = 48.

- Algebricamente, si tratta di risolvere il sistema di due equazioni a due incognite *d* e *u*, dove P+C e P-C sono dati a chi deve trovare P: P+C = 11(*d*+*u*) e P-C = 9(*d*-*u*) che si riducono a *d*+*u* = (P+C)/11 e *d*-*u* = (P-C)/9 e conduce sempre ad un'unica coppia (*d* ;*u*) di due numeri naturali inferiori a 10.

  Il «trucco» di Andrea è dunque il seguente:

- dividere il primo numero dato dal nonno per 11, che dà il risultato *S*
- dividere il secondo numero dato dal nonno per 9, che dà il risultato *D*
- trovare la cifra *d* delle decine facendo la semisomma (*S*+*D*)/2
- trovare la cifra *u* delle unità facendo la semidifferenza (*S*–*D*)/2

- Per sapere se funziona per tutti i numeri, senza algebra, si può prolungare la tabella delle prove ai casi particolari come i numeri con le due stesse cifre, di un multiplo di 10, di un numero di una cifra scritto con uno « 0 », ...

Esempi:

P	C	P + C	P – C	*d*	*u*
66	66	132 = **12**x11	0 = **0** x 9	12/2	12/2
50	05	55 = **5** x 11	45 = **5** x 9	10/2	0/2
05	50	55 = **5** x 11	–45 = –**5** x 9	0/2	10/2

quindi il trucco funziona ancora.

Attribuzione dei punteggi

4 Spiegazione chiara del «trucco» e verifica che funziona sempre per i numeri naturali inferiori a 100

3 Spiegazione confusa ma che permette comunque di ritrovare il numero pensato a partire dalla somma e dalla differenza

oppure: risposta ben spiegata ma che arriva alla conclusione che il trucco non funziona sempre, in seguito ad una confusione tra la differenza (numero intero relativo) e "lo scarto" (valore assoluto). In questo caso, la risposta deve indicare che manca una condizione (per esempio: pensa a un numero di due cifre di cui la cifra delle decine è maggiore di quella delle unità)

2 Scoperta che la somma del numero pensato e di quello capovolto è un multiplo di 11 e che la differenza tra questi due numeri è un multiplo di 9, con uno o più esempi

1 Inizio di ragionamento corretto (con qualche esempio e una proprietà della somma o della differenza)

0 Incomprensione del problema

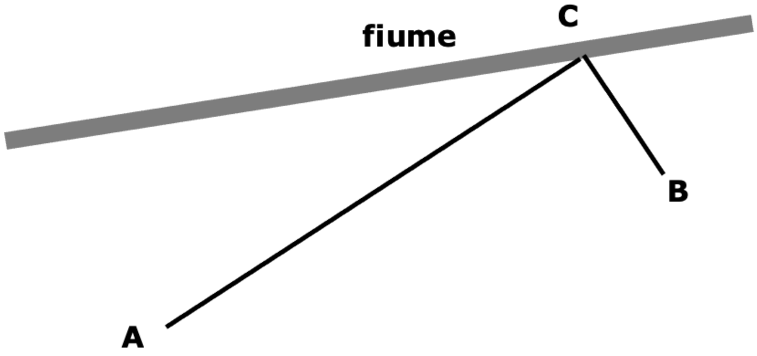
Livello: 9, 10

Origine: Siena

20. LA NUOVA STRADA (Cat. 9, 10)

Le città Alfa (A) e Beta (B) sono situate nei pressi di un fiume le cui rive sono rettilinee in quella zona. Immaginate di essere un ingegnere incaricato di tracciare una nuova strada che, oltre a collegare tra loro le due città, passi vicino al fiume (in C, nell'esempio del disegno che segue).

Disegnate la strada più corta possibile e spiegate perché si tratta del percorso più breve.



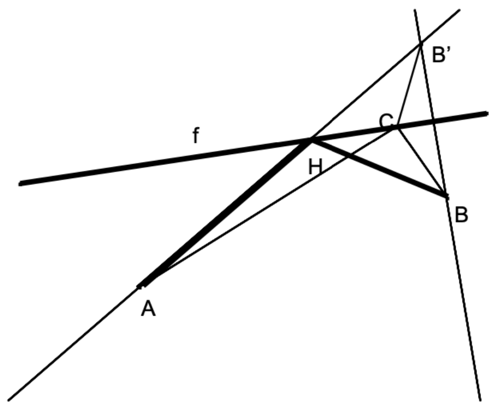
ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria: concetto di distanza, simmetria assiale

Analisi del compito

- Rendersi conto che la distanza varia in funzione del punto scelto sul fiume. Misurando le diverse soluzioni ci si avvicina all'unica soluzione cercata.
- Considerare che la riva « f » è rettilinea e immaginare un punto B' simmetrico di B rispetto all'asse « f ».
- Per un punto C qualunque su « f », costruire con una simmetria assiale, CB' = CB. Il tragitto A-C-B ha la stessa lunghezza del tragitto A-C-B'. L'intersezione della retta AB' con « f » determina il punto cercato H, poiché il tragitto A-H-B' è più corto del tragitto A-C-B' e, poiché HB = HB', il tragitto A-H-B, della stessa lunghezza di A-H-B', è il più corto di tutti i percorsi del tipo A-C-B.



Attribuzione dei punteggi

4 Risposta esatta con spiegazione del perché si tratta del percorso più breve

3 Risposta esatta con solo disegno

2 Soluzione trovata a tentativi (misurando i due segmenti)

1 Inizio di ragionamento (per esempio considerare alcuni punti su f e misura delle relative distanze da A e B)

0 Incomprensione del problema

Livello: 9 - 10

Origine: Ticino, riprendendo un problema "classico"